

Б.Б.Кадомцев

## **ДИНАМИКА И ИНФОРМАЦИЯ**

Зародившись в недрах классической механики, динамический подход к описанию физических явлений был распространен впоследствии на все области физики и на любые объекты макро- и микромира. Понятие информации относится к передаче, приему и обработке каких-либо сведений или сигналов. Наивысшего развития и использования оно достигло в компьютерной технике. Казалось бы, нет области, где эти понятия приходили бы в соприкосновение друг с другом. Однако это не так: при эволюции сложных физических систем возможно появление точек бифуркации, где динамическое поведение объекта может сильно зависеть от малых возмущений, т.е. от сигналов, приходящих либо от окружения, либо от других динамических систем. Поэтому для сложных физических систем одинаково важными являются как динамические (т.е. грубые), так и информационные (т.е. более тонкие) аспекты поведения систем. Именно этому вопросу — взаимодействию динамических и информационных аспектов поведения сложных систем — и посвящена настоящая книга. В книге много внимания уделяется вопросу о соотношении между классическими и квантовыми явлениями.

Настоящее издание практически без изменений повторяет издание 1997 г., которое разошлось в течение короткого срока, что свидетельствует о большом интересе читателей.

Книга адресована студентам старших курсов, аспирантам и научным работникам, имеющим интерес к принципиальным вопросам физики и к основаниям теоретической физики.

### **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие.	7
Введение. .	15
Глава I ИНФОРМАЦИЯ И ДИНАМИКА	18
1. Информация	18
2. Энтропия	21
3. Цикл Карно	23
4. Необратимые процессы .	25
5. Энтропия и информация	27
6. Энтропия еще раз	31
7. Управление	33
8. Газодинамика	34
9. Волны	37
10. Корреляционная функция	42
Глава II МИКРОМИР И МАКРОМИР	44
11. Уравнение Шрёдингера	45
12. Намерения	46
13. Частица в термостате	52
14. Дуализм волна-частица	56

15. "Радиоактивный распад"	62
16. Кот Шрёдингера .	66
17. Необратимость нашего окружения .	68
18. Кто бросает кости?	70
19. Броуновское движение	72
20. Микромир и макромир .	78
Глава III ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ	80
21. Поведение микрочастицы	81
22. Восприятие	88
23. Флуктуации и необратимость	93
24. Измерение в квантовой теории	106
25. Парадокс Эйнштейна-Подольского - Розена (ЭПР)	118
26. Неравенства Белла	121
27. Квантовая криптография и телепортация	123
28. Запутанные состояния	125
29. Квантовые вычисления Глава IV	130
СЛУЧАЙНОСТЬ И НЕОБРАТИМОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ	136
30. Случайная волновая функция	137
31. Мезомир .	144
32. Коллапсы волновых функций	153
33. Классический молекулярный хаос	163
34. Необратимость классическая и квантовая	171
35. Приближение к равновесию и коллапсы	185
36. Квантовый эффект Зенона	197
37. Броуновское движение квантовой частицы	200
38. Молекулярный хаос .	211
39. Волновые функции атомов газа	220
40. Квантовый хаос в газе	229
Глава V КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И ИНФОРМАЦИЯ	241
41. Эффект Соколова	242
42. Теория эффекта Соколова	251
43. Исследование эффекта Соколова	263
44. Квантовая коммуникация	270
45. Сверхсветовая коммуникация	281
46. Настоящее, прошлое, будущее	292
Глава VI ОТ КВАНТОВ К КЛАССИКЕ	299
47. Вторичное квантование	300
48. Кинетика газа	305
Глава VII НЕЛИНЕЙНОСТЬ И САМООРГАНИЗАЦИЯ	317
49. Конвекция	317
50. Самоорганизация	324
51. Иерархические системы	328
52. Свобода воли	332

Заключение. .	339
<b>КОММЕНТАРИИ К ГЛАВАМ</b>	
К главе I. Алгоритмическая информация и демон Максвелла	350
К главе II. Чистые и смешанные ансамбли	352
К главе III. Запутанные состояния	354
III. 1. Квантовая нелокальность	
III.2. Операции с запутанными состояниями	
К главе IV. Необратимость в квантовой теории	369
IV. 1. Термодинамические ограничения (constraints) на аксиомы квантовой теории	
IV.2. Квантование систем с диссипацией	
К главе V. Эффект Соколова	375
V. 1. Эффект Соколова как результат когерентной суперпозиции ЭПР-взаимодействий	
V.2. Электростатика корреляционного поля $E^*$	
V.3. Коллапсы волновых функций	
К главе VI. Информационно открытые системы	383
Список литературы	388
Предметны и указатель	392

### Предметный указатель

Алгоритмическая информация 350	Информация алгоритмическая 350
Аттрактор (странный) 322	— по Шеннону 20
Белла неравенства 121	Информационно открытые системы 383
Бит 19	
Броуновское движение классической частицы 72	Исследование эффекта Соколова 203
— — квантовой частицы 200	Квантовые вычисления 130
Вероятность 19	— корреляции 241
Вигнера функция 86	Квантовая криптография 123
Волны 37	Квантовый телеграф 270
Волновой пакет 46	Квантовая телепортация 123
Волновая функция 45	Кинетическое уравнение 163
Волновые функции атомов газа 220	— — для амплитуд 227, 308
Восприятие 88	Классический мир 299
Вторичное квантование 300	Коллапсы волновых функций 153
Газодинамика 34	Кинетика газа 305
Дуализм волна-частица 56	Конвекция 317
Забит 127	Кубит 127, 131
Запутанные состояния 125, 354	Мезомир 144
Зенона эффект 197	Мера запутанности 354
Измерения в квантовой механике 109	Модель непрерывного коллапсирования 216
Иерархические системы 328	Молекулярный хаос квантовый 211

Молекулярный хаос классический  
163  
Намерения 46  
Нат 20  
Негэнтропия 327  
Необратимость квантовая 179, 369  
—классическая 172  
Открытые системы 383  
Парадокс Эйнштейна-Подольского-  
Розена 118  
Приближение к равновесию 345  
"Радиоактивный распад" 62  
Самоорганизация 324  
Сверхсветовая коммуникация 281  
Свобода воли 338  
Случайная волновая функция 137  
Соколова эффект 242  
Странный аттрактор 322  
Стягивание волновой функции — см.  
    коллапс волновой функции  
Телепортация 123  
Теория эффекта Соколова 251  
Управление 33  
Управляющий параметр 321  
Управляющее уравнение 227  
Уравнение Ланжевена 73  
— Фоккера - Планка 74  
— Шрёдингера 45  
Фейнмана диаграммы 52  
Флуктуации 93  
Хаос динамический 323  
— молекулярный классический 211  
— — квантовый 229  
Хинт 104  
Цикл Карно 23  
Частица в термостате 52  
Шрёдингера кот 66  
— уравнение 45  
Шмидта полярная форма 129  
Эйнштейна - Подольского - Розена  
    парадокс 118, 315  
Энтропия 21  
Эффект Зенона 197  
— Соколова 242, 375

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . . 7

Введение . . . . . 15

## Глава I

**ИНФОРМАЦИЯ И ДИНАМИКА** . . . . . **18**

1. Информация . . . . .	18
2. Энтропия . . . . .	21
3. Цикл Карно . . . . .	23
4. Необратимые процессы . . . . .	25
5. Энтропия и информация . . . . .	27
6. Энтропия еще раз . . . . .	31
7. Управление . . . . .	33
8. Газодинамика . . . . .	34
9. Волны . . . . .	37
10. Корреляционная функция . . . . .	42

## Глава II

**МИКРОМИР И МАКРОМИР** . . . . . **44**

11. Уравнение Шрёдингера . . . . .	45
12. Намерения . . . . .	46
13. Частица в термостате . . . . .	52
14. Дуализм волна – частица . . . . .	56
15. "Радиоактивный распад" . . . . .	62
16. Кот Шрёдингера . . . . .	66
17. Необратимость нашего окружения . . . . .	68
18. Кто бросает кости? . . . . .	70
19. Броуновское движение . . . . .	72
20. Микромир и макромир . . . . .	78

## Глава III

<b>ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ</b>	<b>80</b>
21. Поведение микрочастицы . . . . .	81
22. Восприятие . . . . .	88
23. Флуктуации и необратимость . . . . .	93
24. Измерение в квантовой теории . . . . .	106
25. Парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР) . . . . .	118
26. Неравенства Белла . . . . .	121
27. Квантовая криптография и телепортация . . . . .	123
28. Запутанные состояния . . . . .	125
29. Квантовые вычисления . . . . .	130

## Глава IV

<b>СЛУЧАЙНОСТЬ И НЕОБРАТИМОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ</b>	<b>136</b>
30. Случайная волновая функция . . . . .	137
31. Мезомир . . . . .	144
32. Коллапсы волновых функций . . . . .	153
33. Классический молекулярный хаос . . . . .	163
34. Необратимость классическая и квантовая . . . . .	171
35. Приближение к равновесию и коллапсы . . . . .	185
36. Квантовый эффект Зенона . . . . .	197
37. Броуновское движение квантовой частицы . . . . .	200
38. Молекулярный хаос . . . . .	211
39. Волновые функции атомов газа . . . . .	220
40. Квантовый хаос в газе . . . . .	229

## Глава V

<b>КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И ИНФОРМАЦИЯ</b>	<b>241</b>
41. Эффект Соколова . . . . .	242
42. Теория эффекта Соколова . . . . .	251
43. Исследование эффекта Соколова . . . . .	263
44. Квантовая коммуникация . . . . .	270
45. Сверхсветовая коммуникация . . . . .	281
46. Настоящее, прошлое, будущее . . . . .	292

## Глава VI

**ОТ КВАНТОВ К КЛАССИКЕ** **299**

47. Вторичное квантование . . . . . 300  
 48. Кинетика газа . . . . . 305

## Глава VII

**НЕЛИНЕЙНОСТЬ И САМООРГАНИЗАЦИЯ** **317**

49. Конвекция . . . . . 317  
 50. Самоорганизация. . . . . 324  
 51. Иерархические системы . . . . . 328  
 52. Свобода воли . . . . . 332

**Заключение** . . . . . **339****КОММЕНТАРИИ К ГЛАВАМ**

К главе I. Алгоритмическая информация и демон Максвелла . . 350

К главе II. Чистые и смешанные ансамбли . . . . . 352

К главе III. Запутанные состояния . . . . . 354

III.1. Квантовая нелокальность

III.2. Операции с запутанными состояниями

К главе IV. Необратимость в квантовой теории . . . . . 369

IV.1. Термодинамические ограничения (constraints)  
на аксиомы квантовой теории

IV.2. Квантование систем с диссипацией

К главе V. Эффект Соколова . . . . . 375

V.1. Эффект Соколова как результат когерентной  
суперпозиции ЭПР-взаимодействий

V.2. Электростатика корреляционного поля  $E_c$

V.3. Коллапсы волновых функций

К главе VI. Информационно открытые системы . . . . . 383

Список литературы . . . . . 388

Предметный указатель . . . . . 392





# ПРЕДИСЛОВИЕ

Со студенческих лет и на многие годы у меня сохранилась неудовлетворенность в отношении понимания квантовой механики. Возможно, эта неудовлетворенность была связана с тем, что я сам вкладывал в термин "понимание" несколько иной смысл, чем это общепринято. Для меня не было достаточным иметь только совершенный математический аппарат и умение использовать его для расчета любых конкретных физических процессов. За формулами я всегда пытался уловить нечто более глубинное, что можно было бы сложить в некоторое интуитивное понимание физики в целом.

Я поясню более конкретно, что меня не удовлетворяло в обычном изложении квантовой механики. Любой учебник по квантовой механике начинается с уравнения Шрёдингера и с волновой функции  $\psi$ , которая этому уравнению удовлетворяет. Можно смириться с утверждением, что уравнение Шрёдингера не может быть выведено и было найдено чисто интуитивно, чтобы объяснить странные свойства микромира. Но с мистическими свойствами волновой функции трудно свыкнуться, не имея в отношении ее некоторой более наглядной физической картины. Как известно, волновая функция в квантовой механике играет ключевую роль: все физические величины при квантовом описании представляют собой операторы, действующие на волновую функцию, а числовые значения физических величин представляют собой собственные значения этих операторов. Соответственно, эволюция физических величин во времени определяется временной эволюцией волновой функции. Уравнение Шрёдингера для многих частиц как раз и служит для описания такой эволюции. Казалось бы, идеологически все просто. Но не тут-то было!

Числовое значение любой физической величины может быть найдено только при измерении. А измерение уравнением Шрёдингера не описывается. Это обстоятельство очень четко формулировалось в начальные годы становления квантовой механики. Например, оно без всяких оговорок упоминается в статье В.А. Фока [1]. А в книге фон Неймана [2] по математическим основаниям квантовой механики утверждается, что существует два класса квантовых процессов: эволюция согласно уравнению Шрёдингера и измерения, результат которых можно получить с помощью операторов проектирования. Но

какой физический процесс стоит за этими операторами, остается неясным. Поскольку результаты измерений имеют вероятностный характер, то можно думать, что в измерениях проявляются свойства некоторого случайного процесса, но никакого аппарата для описания физики этого процесса в учебниках найти нельзя.

Отсутствие четко сформулированного математического описания процессов измерения приводит к целому ряду трудностей, если не сказать, несуразностей. Прежде всего появляется странная для точной науки необходимость в интерпретации физического смысла волновой функции и самой квантовой механики. Более того, таких интерпретаций может быть несколько [3–5], хотя они и не очень сильно отличаются друг от друга. Далее, поскольку для измерения кажется необходимым присутствие наблюдателя, возникло много разных точек зрения по поводу роли наблюдателя. Если идти от микрообъекта к измерительному прибору, а затем — к наблюдателю, то на каждом шаге кажется естественным пользоваться квантовой физикой: и прибор, и наблюдатель являются физическими системами, и поэтому не видно препятствий к описанию их посредством уравнения Шрёдингера для многих частиц. Но тогда возникает вопрос, где же происходит коллапс волновой функции к одной единственной собственной функции и соответственно коллапс физической величины к ее собственному значению и каким механизмом это коллапсирование осуществляется? Можно, конечно, чисто формально считать, что сам наблюдатель в свою очередь кем-то наблюдается, например, "другом Дайсона", но тогда второго наблюдателя также кто-то должен наблюдать и так до бесконечности. Картина, признаться, не очень привлекательная для физической науки.

Тесно связанной с проблемой измерения является проблема перехода к классической физике. В учебниках по квантовой механике нередко встречается утверждение о том, что квантовая механика для своего обоснования нуждается в классической механике. Однако сама классическая механика в квантовой теории не определена. Строго говоря, ее нельзя считать предельным частным случаем квантовой механики в применении к физическим телам большой массы и больших размеров (хотя такого рода утверждения иногда можно встретить в научной литературе). Дело в том, что любая классическая частица и классическое тело обладает точно заданными координатами и размерами. В квантовой теории такой ситуации должны были бы соответствовать волновые пакеты с очень узкой локализацией, стремящейся к нулю при  $\hbar \rightarrow 0$ . Однако никаких физических оснований для такой локализации в ортодоксальной квантовой механике нет. Любому классическому объекту можно приписать сколь угодно

несуразную волновую функцию, и никаких правил для отбора более разумных волновых функций не существует. Более того, для классических тел должен быть применен принцип суперпозиции, что приводит к такой нелепости, как суперпозиция живого и мертвого кота в знаменитом парадоксе "Кот Шрёдингера" [6]. Ясно, что все выше указанные трудности должны разрешаться каким-то сравнительно несложным образом, поскольку квантовая механика вместе с вероятностной интерпретацией позволила объяснить и описать практически все физические явления и процессы.

В настоящей книге для этой цели используются коллапсы волновых функций, основанные на предположении, что волновая функция имеет чисто информационный смысл. Поясним, о чем идет речь. Пусть некоторый пучок света падает на черную пластинку и в ней поглощается. Меру поглощения можно характеризовать коэффициентом поглощения  $\kappa$ , так что интенсивность света  $I$  убывает с глубиной  $x$  как  $I = I_0 \exp(-\kappa x)$ . Пластинку можно считать черной, если ее толщина  $L$  удовлетворяет условию  $L\kappa \gg 1$ . Допустим теперь, что в пучке света находится один-единственный фотон. Ясно, что он поглотится не по всей поверхности пластинки, а в сравнительно небольшом пятнышке с поперечным размером в несколько длин волн и глубиной  $\sim \kappa^{-1}$ . Можно утверждать, что поглощение фотона сопровождается его коллапсом. Для нас самым главным является то обстоятельство, что при коллапсе волновая функция фотона уничтожается во всем пространстве, за исключением области поглощения. Вот здесь-то мы и встречаемся с коллапсом волновой функции и ее информационным смыслом!

Коллапс волновой функции сходен с коллапсом вероятностей. Если, например, на стол бросается кубик с занумерованными шестью гранями, то перед падением на стол каждая из граней имеет вероятность выпадения, равную  $1/6$ . А после падения кубика верхняя грань получает вероятность, равную единице, а все остальные вероятности попросту уничтожаются.

В применении к квантовой теории принцип коллапсирования волновой функции частиц означает, что наряду с эволюционным развитием этой функции согласно уравнению Шрёдингера следует рассматривать процессы коллапса с уничтожением волновой функции в широкой области пространства, где данная частица отсутствует. Оба вида процессов имеют равные права на существование. Важно, что при наличии коллапсов волновую функцию следует считать случайной функцией.

Для описания случайных величин и случайных процессов могут быть использованы различные методы. Наиболее наглядным является

метод уравнения Ланжевена. Как известно, уравнение Ланжевена было предложено для описания движения броуновской частицы. Сила со стороны атомов газа, действующая на броуновскую частицу, представляется в виде суммы регулярной силы трения, пропорциональной скорости частицы, и случайных толчков с очень коротким временем корреляции. На величину этих толчков накладывается определенное ограничение (т.е. связь) так, чтобы средний квадрат скорости броуновской частицы стал равен ее тепловому значению.

В случае квантовой механики уравнение типа Ланжевена следует писать непосредственно для волновой функции. В соответствии с этим в обычное уравнение Шрёдингера следует добавить член со случайным оператором, который можно представить в виде суммы двух членов. Регулярный член вида  $-i\psi/2\tau$  описывает затухание волновой функции с некоторым характерным временем  $\tau$ . А член, аналогичный толчкам в уравнении Ланжевена, описывает само коллапсирование, которое в случае дискретного набора собственных функций соответствует случайной проекции на одно из состояний с уничтожением всех остальных состояний. Коллапсы удовлетворяют наложенной извне связи: вероятность коллапсирования в состояние  $\psi_j$  должна быть пропорциональной  $|\psi_j|^2$ . Физически эта связь соответствует допущению, что коллапсирование производится очень слабым внешним возмущением, которое не может изменить диагональные элементы матрицы плотности и уничтожает только недиагональные ее элементы путем декогерентности, т.е. хаотизации фаз. Если отвлечься от математики, то предлагаемый подход к описанию коллапсов очень близок к системе представлений Копенгагенской школы на заре становления квантовой теории.

В книге рассмотрены некоторые примеры коллапсирования волновых функций. На простых моделях рассеяния квантовых частиц на макротелах с последующим коллапсированием волновых функций частиц показано, как макротела приобретают свойства классических тел. А именно, коллапсы волновых функций рассеянных частиц осуществляют коллапсы волновых функций макротел, так что последние превращаются в узколокализованные волновые пакеты. Рассмотрены также коллапсы волновых функций при радиоактивном распаде. Но наиболее подробно изучено коллапсирование волновых функций атомов или молекул обычного газа. Показано, что квантовый хаос газа выглядит как набор волновых пакетов атомов газа. Размеры этих пакетов устанавливаются и поддерживаются за счет парных столкновений частиц. При этом возникает очень интересный эффект слабого отклонения от универсального закона  $p \sim |\psi|^2$ , где  $p$  представляет собой вероятность состояния, а  $\psi$  — соответствующая собственная функция. В связи с этим хотелось бы напомнить рекомендацию

Р. Фейнмана в книге [7]: "Существует несколько проблем, связанных с интерпретацией, над которыми можно было бы еще поработать... Одна из них — это доказать, что вероятностная интерпретация  $\psi$ -функции является единственной последовательной интерпретацией этой величины... Было бы интересно показать, что нельзя предложить никакого другого последовательного истолкования этой величины...

На самом деле не должно быть обычного разделения на наблюдаемое и наблюдателя, применяемого нами сейчас при анализе измерений в квантовой механике; этот вопрос требует обстоятельного изучения".

В газе действительно сам собой, т.е. без участия наблюдателя, возникает процесс коллапсирования волновых функций атомов газа. Для каждого отдельного атома имеет место слабая неопределенность в энергии порядка  $\delta\varepsilon \sim \hbar/\tau$ , где  $\tau$  — среднее время столкновений. Именно с такой точностью закон сохранения энергии справедлив для отдельного атома. Но для газа в целом закон сохранения энергии выполняется с гораздо более высокой точностью. В силу этого у каждого из коллапсов появляется очень слабая асимметрия порядка смещения волнового пакета на одну длину волны вдоль направления движения волнового пакета. Соответствующий эффект очень мал, но он может приводить к макроскопически наблюдаемым эффектам. В книге довольно подробно описан эффект Соколова, состоящий в самопроизвольной поляризации возбужденных атомов водорода при их пролете вблизи поверхности металла. Этот эффект объясняется коллапсами волновых функций свободных электронов проводимости в металле.

Эффект Соколова интересен тем, что он позволяет по-новому взглянуть на вопрос о возможности или невозможности передачи информации посредством квантовых корреляций. Ранее обсуждение этой возможности (точнее, невозможности) проводилось на основе использования так называемых ЭПР-пар коррелированных квантовых частиц (ЭПР — сокращенное название парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена [8]). Но одиночные пары для этого не подходят, так как закон  $p \sim |\psi|^2$  исключает возможность управления корреляциями ЭПР-пар на расстоянии. В отличие от одиночных корреляционных пар частиц эффект Соколова представляет собой результат когерентной суперпозиции ЭПР-взаимодействий, когда одному из партнеров ЭПР-взаимодействий, т.е. возбужденному атому, соответствует огромное число вторых партнеров-электронов проводимости металла. В эффекте Соколова ограничение  $p \sim |\psi|^2$ , выраженное в терминах одиночных волновых функций электронов, слабо нарушается, так что возможность передачи корреляционных сигналов на небольшие расстояния не исключена. Речь идет фактиче-

ски об использовании квантовых корреляций в самом процессе коллапсирования, т.е. незавершенного квантового "измерения". Читатель сможет узнать, как можно избежать нарушения принципа причинности, если передача корреляционных сигналов окажется сверхсветовой.

Поскольку волновой функции мы придаем информационный характер, приходится более подробно познакомиться с понятием информации. Информация, как обычно, вводится по Шеннону, а для выявления ее связи с энтропией используются тепловые "микромашинки" Сцилларда [9]. Для описания классических измерений в терминах информационных процессов в книге вводится специальное понятие восприятия.

Хотя волновая функция и связана с информацией, она явно отличается от нее по своему физическому смыслу и содержанию. В отличие от необратимых процессов, связанных с временным изменением вероятностей, у волновой функции существует два вида эволюции: обратимое изменение со временем согласно уравнению Шрёдингера и необратимые "квантовые переходы" или "квантовые скачки" при коллапсировании. Чтобы понять оба типа временной эволюции, удобно, следуя Ю. Орлову [10], воспользоваться соображениями о "волновой логике". Для этой цели можно ввести понятие "намерения", которое с легкостью воспринимается в применении к выбору альтернативных решений у человека, а в применении к квантовой теории оказывается легко совместимым с общими ее принципами. В частности, с точки зрения обратимых процессов смены намерений становится понятным, почему в формализме интегрирования по траекториям, предложенном Фейнманом [7], должны складываться именно амплитуды. Последовательность измерений и "принятий решений" оказывается характерной не только для мыслительной деятельности человека, но и для эволюции квантовых систем, находящихся в информационной связи с внешним Миром. Сосредоточимся на этом вопросе несколько более подробно.

Рассмотрение квантового хаоса в газе показывает, что для строгого обоснования необратимости требуется допущение о слабом взаимодействии газа с необратимым внешним окружением. Это взаимодействие может быть исключительно малым, и по этой причине его можно назвать "информационной связью". Замкнутые системы, классические или квантовые, испытывают только обратимую динамическую эволюцию. Но при наличии малой связи с необратимым внешним миром картина динамического поведения может резко измениться. У классического газа это изменение происходит из-за очень сильной неустойчивости, т.е. быстрого разбегания траекторий

в фазовом пространстве. В силу этого даже очень слабое внешнее возмущение делает уравнение Лиувилля параболическим с малым коэффициентом при вторых производных. Как известно, решения таких уравнений могут сильно отличаться от решений уравнений без членов со старшими производными. Малые внешние шумы усиливаются динамическим хаосом газа, и его поведение подчиняется уравнению Больцмана для одночастичной функции распределения. А в случае квантового газа затравочное внешнее измерение, усиленное квантовым хаосом, приводит к пакетизации волновых функций атомов газа и придает им черты классических частиц.

На основании изложенного мы приходим к следующей общей картине. Мир в целом необратим, как необратимы любые его части, связанные с внешним окружением. Обратимость может существовать только в объектах, полностью изолированных от внешнего мира. Однако бóльшая часть наших представлений была развита на основе анализа именно замкнутых систем. В частности, именно для замкнутых систем построен формализм ортодоксальной квантовой теории. При наличии даже очень малой связи с необратимым внешним миром (такую связь можно назвать информационной) поведение сложных квантовых систем может радикально отличаться от поведения замкнутых систем. Более конкретно — мы должны явно учитывать коллапсы волновых функций. Чем сложнее устроена квантовая система, тем бóльшую роль в ней играют процессы коллапсирования.

В свое время И. Пригожин [11] ввел понятие открытых систем, т.е. таких физических систем, через которые могут протекать потоки энергии и энтропии. При достаточно больших потоках в таких системах могут происходить явления нелинейной самоорганизации. Аналогичные процессы могут развиваться и в квантовых системах. Связь квантовых систем с внешним миром может быть очень малой, но она, тем не менее, может приводить к радикальному их изменению и к квантовой самоорганизации. Такие системы можно назвать информационно открытыми системами. Сильное влияние внешнего окружения на сложные квантовые системы связано с возможностью декогерентности, т.е. уничтожения фазовых корреляций у различных компонент волновой функции. В том случае, когда речь идет об одной частице, такая декогерентность выглядит как коллапс со случайным уничтожением составляющих волновой функции в широких областях пространства. А у обычных макротел "информационное общение" с окружением приводит к стягиванию волновых функций (зависящих от координат центра масс) в очень узко локализованные пакеты, т.е. к превращению макротел в классические объекты. При квантовых измерениях происходит соприкосно-

вание микро- и макрообъектов, сопровождаемое коллапсом их волновых функций.

Как уже упоминалось выше, коллапс волновых функций удобно описывать в терминах случайных функций, удовлетворяющих уравнению типа Ланжевена. Случайное влияние окружения, усиленное собственным динамическим хаосом, учитывается в таком уравнении двумя членами — регулярным затуханием и случайным рождением новых волновых пакетов. Образно говоря, уже на уровне микромира мы встречаемся с "рождением" и постепенным "угасанием" волновых пакетов или волновых функций. Другими словами, жизнь начинается с микромира, а затем она может многократно усиливаться и расширяться в открытых биологических системах.

Здесь мы сталкиваемся с возможностью зарождения новых линий эволюции, которые были названы Кантом [12] причинностью через свободу (Causalitat durch Freiheit). Всем нам очевидно, что такие процессы рождения нового путем развития очень малых начальных возмущений, скорее "микрочричин", играют огромную роль в развитии Природы. Однако традиционно физика имела дело с динамическими системами с точно определенными координатами частиц и причинно-следственными связями. При включении нелинейных процессов, стартующих с малых неустойчивостей, необходимо учитывать даже очень слабые связи, которые можно назвать информационными. Именно этой теме — тесной связи детерминированного поведения динамических систем с тонкими информационными процессами и посвящена настоящая книга. Значительная ее часть была опубликована ранее в журнале "Успехи физических наук" [13]. Многие из рассмотренных здесь вопросов были прояснены в обсуждениях и совместных работах с моим сыном М.Б. Кадомцевым.



# ВВЕДЕНИЕ

Все мы привыкли к тому, что основные разделы физики построены на принципах динамики. Все начинается с механики материальной точки и с законов Ньютона, которые вводят основные динамические понятия: массу, скорость, импульс и силу. Теоретическая механика всего лишь оформляет элементарные законы механики в более пышные одежды дифференциальных уравнений и вариационных принципов. На базе простейших законов движения материальной точки строятся более сложные уравнения движения сплошных сред: газов, жидкостей и упругих тел. Здесь впервые появляются непрерывные функции координат и времени, играющие роль полей, хотя собственно полями принято считать поля в вакууме, например электромагнитное поле. Уравнения для полей — это тоже уравнения динамики. Термодинамика только на первый взгляд кажется феноменологической наукой, а в действительности она может быть построена на базе статистической физики, представляющей собой лишь специфическую разновидность динамики. Тот факт, что физика строится на принципах динамики, проявляется и в основных физических единицах измерения (например, сантиметр, грамм, секунда), которые изначально вводятся в механике материальной точки, а затем переносятся в другие, более сложные разделы физики.

Нечто, совсем не похожее на динамику, появляется в квантовой теории при интерпретации квадрата волновой функции как соответствующей вероятности. Вероятность здесь выходит на первый план как существенный элемент теории, и до сих пор не прекращаются дискуссии о смысле волновой функции и описываемой ею эволюции вероятностей наблюдения за той или иной физической величиной. Вслед за Эйнштейном хотелось бы считать, что квантовая вероятность соответствует неполноте описания микрообъекта и что может существовать более точная теория, которая объяснит случайность наблюдаемых величин на базе динамики некоторых скрытых параметров. Однако в последние годы было убедительно показано, что локального реализма (т.е. локальных скрытых параметров) нет. Следовательно, квантовая вероятность, как это подчеркивалось Н. Бором, носит более глубокий характер, она придает волновой функции своеобразные черты, имеющие информационный смысл.

Математически точное определение величины информации появилось вместе с рождением кибернетики — науки об управлении и автоматизации динамических процессов. А именно, если некоторая физическая величина может а priori принимать несколько значений, то наблюдение одного из этих значений сразу увеличивает информацию об этой физической величине. Если у автомата имеется достаточное количество энергии, то после получения информации он может изменить значение физической величины в нужную сторону.

Сигнал о значении измеряемой величины может быть сколь угодно мал. Сигнал управления также может быть очень мал, если он подается на достаточно мощный усилитель.

Таким образом, для управления важна не величина сигнала, а его форма, т.е. смысловое содержание. Можно сказать, что при взаимодействии автоматов важен не столько обмен энергией, сколько обмен символами (т.е. сигналами).

Но эти утверждения относятся не только к искусственно созданным автоматам, но и к естественным физическим системам, находящимся на границе устойчивости. Малые сигналы, действующие на такие системы, могут приводить к существенным последствиям. Речь фактически идет об открытых физических системах, через которые могут протекать большие потоки энергии. Такие системы, будучи сильно неравновесными, обнаруживают сложное динамическое поведение. Их обычно так и называют — сложные физические системы.

Для описания сложных физических систем оба аспекта — динамический и информационный — могут играть одинаково важную роль. Мы приходим к проблеме совместного воздействия на систему сил и информации в условиях сильного отклонения от термодинамического равновесия. Оказывается, что игра нелинейных динамических процессов в таких системах очень часто приводит к самоорганизации, когда как динамическое, так и информационное содержание процесса оказываются согласованными с большой точностью и складываются в единый "организм".

Все эти вопросы актуальны для современной физики, составляя мощный ее пласт. Здесь мы хотели бы познакомить читателя с наиболее интересными идеями и направлениями исследований в этой области. Изложение материала ряда разделов намеренно дается на популярном уровне, и очень часто строгость приносится в жертву живости аргументации. Соответственно, книга выглядит, скорее, как набор размышлений на базе тех физических представлений, которые сами по себе служат предметом серьезных книг и монографий, но которые трудно было бы вместить в один единый текст, не идя умышленно на сильное упрощение стиля изложения. Наряду со

многими хорошо известными фактами и их теоретическими трактовками книга содержит некоторые новые, подчас непривычные рассуждения. Кому-то они могут показаться неубедительными, а подчас и просто неправильными. Но я рекомендую читателям не делать поспешных суждений: некоторые вопросы обсуждаются повторно или даже несколько раз с несколько иных точек зрения, и убедительность соответствующих выводов становится все больше и больше.

Список литературы, к сожалению, никак не может претендовать на полноту: в нем приведены ссылки только на те статьи и книги, которые естественно возникали по мере изложения. Извинением мне служит лишь то обстоятельство, что и само изложение не является очень строгим и обстоятельным.

## ИНФОРМАЦИЯ И ДИНАМИКА

Данная глава имеет вводный характер. Она знакомит читателя с понятием информации в ее простейшем варианте, т.е. по Шеннону. Здесь же выясняется связь информации с энтропией. На примере идеальной газодинамики поясняется, как возникают физические классические поля в таких динамических процессах, которые описываются непрерывными функциями координат и времени. Вопрос о том, как могут быть связаны между собой динамические и информационные процессы, в данной главе пока не обсуждается. В конце главы выводится уравнение Леонтовича — уравнение для огибающей волнового пакета. Нетрудно видеть, что это уравнение похоже на квантовое уравнение Шрёдингера для волновой функции. Но на самом деле между этими двумя уравнениями имеется коренное различие: уравнение Леонтовича описывает эволюцию классического физического поля, а уравнение Шрёдингера, как будет видно из дальнейшего изложения, описывает эволюцию волн информации.

### 1. Информация

В наш век, когда потоки информации обрушиваются на нас буквально со всех сторон, казалось бы, нет нужды объяснять, что такое информация. Однако это не совсем так. Существует точное математическое определение объема информации, и для тех, кто раньше с этим понятием не встречался, мы постараемся объяснить, что это такое.

Самый привычный вид информации — это печатное слово. Например, текст, который Вы читаете, дает Вам возможность воспринимать информацию, заложенную в эту книгу. Она содержится в символах, расположенных построчно, — это буквы, пробелы между словами, знаки препинания. Представляется совершенно очевидным, что чем больше страниц текста, тем большее количество информации содержится в этом тексте. Но чтобы определить объем информации в виде конкретного числа, удобно начать с очень упрощенного примера. Допустим, что наш текст передается с помощью азбуки Морзе, когда каждой букве сопоставляется некоторый набор точек и тире. Более того, рассмотрим упрощенный случай, когда

текст идет подряд без всяких промежутков между буквами и словами. Тогда мы увидим одну сплошную ленту только из точек и тире. В каждой позиции может быть только один из двух символов: либо точка, либо тире. Когда имеется только один из двух вариантов символов, то принято говорить, что каждая из ячеек имеет один бит информации. Вся лента Морзе, имеющая  $N$  символов, содержит  $N$  бит информации. Можно сказать, что такая лента "запомнила" определенный текст, и в каждой из ее  $N$  "ячеек памяти" заложен один бит информации. Полное количество различных текстов, которые можно записать на ленте из  $N$  ячеек, равно, очевидно,  $2^N$ .

Если мы условимся измерять объем информации в битах, то для соответствующей величины информации  $I_B$  можно записать [14] соотношение

$$I_B \equiv N \equiv \log_2 M_N. \quad (1)$$

Здесь  $\log_2$  — это логарифм при основании 2, а  $M_N = 2^N$  — полное число различных текстов. Согласно (1) объем информации равен просто минимальному числу двоичных ячеек, с помощью которых эту информацию можно записать.

Соотношение (1) можно представить в несколько ином виде. А именно, если у нас имеется множество  $M_N$  различных текстов, вероятность  $P_N$  того, что читаемый нами текст совпадет с наугад выбранным из  $M_N$  различных текстов, равно, очевидно,  $P_N = 1/M_N$ . Поэтому вместо (1) можно использовать выражение

$$I_B = -\log_2 P_N. \quad (2)$$

Чем больше  $N$ , тем меньше величина  $P_N$  и тем больше объем информации  $I_B$ , содержащейся в данном конкретном тексте.

Вернемся теперь к обычному буквенному тексту. Пусть число букв алфавита равно 32 (как, например, в русском алфавите без буквы ё). Число  $32 = 2^5$ , и, следовательно, достаточно иметь пять двоичных ячеек, чтобы каждой букве сопоставить одну единственную комбинацию, например, из точек и тире. Если к строчным буквам добавить еще прописные, то число букв удвоится до 64 и потребуется еще один бит информации. Тогда объем информации на одну букву, строчную или заглавную, станет равным  $I_B = 6$ . Добавление интервалов между словами и знаков препинаний дополнительно увеличивает величину информации, приходящуюся на один знак текста.

Однако такой прямой подсчет объема информации на один знак не вполне точен. Дело в том, что в алфавите имеются буквы, которые встречаются в тексте крайне редко. В азбуке Морзе на такие буквы можно истратить больше точек и тире, а на часто используемых буквах

можно, наоборот, сэкономить, сопоставляя им более короткие "отрезки" ленты. Точное определение количества информации было установлено Шенноном [15]. Оно выглядит следующим образом:

$$I = - \sum_i p_i \ln p_i . \quad (3)$$

Здесь суммирование проводится по всем символам, а  $p_i$  означает вероятность появления символа с номером  $i$ . Общее выражение (3) охватывает и часто используемые буквы, и те буквы, у которых вероятность появления в тексте очень мала. В выражении (3) используется натуральный логарифм: соответствующую ему единицу информации называют "нат".

Как известно из теории вероятностей, для случайной величины  $x_i$  можно ввести определение среднего значения, или математического ожидания, по формуле

$$\langle x_i \rangle = \sum p_i x_i , \quad (4)$$

где суммирование производится по всем возможным реализациям случайной величины  $x_i$  с вероятностью  $p_i$  для  $i$ -й реализации. Как мы видим, выражение (3) можно записать также в виде

$$I = - \langle \ln p_i \rangle . \quad (5)$$

Если речь снова идет о тексте, а величина  $I$  относится к одной ячейке текста, т.е. к одному знаку, то  $p_i$  — это вероятность появления символа с номером " $i$ ". Например, если это буква "а", то соответствующую вероятность можно найти, подсчитывая, сколько раз буква "а" встречается на одной странице, и деля полученное число на полное число знаков на одной странице.

Если известна величина информации (3), относящаяся к одному знаку, то для текста из  $N$  знаков эту информацию следует увеличить просто в  $N$  раз. Разумеется, формулой (3) можно пользоваться и для всего текста. При этом вероятности  $p_i$  существенно меньше, поскольку резко возрастает число возможных комбинаций, а результат останется тем же: информацию одного знака нужно умножить на  $N$ .

В формулах (2) и (3) используются логарифмы при разных основаниях: в (2) — это логарифм при основании 2, а в (3) — натуральный логарифм. Поскольку для любого числа  $N$  справедливы соотношения  $N = 2^{\log_2 N} = e^{\ln N}$ , то имеем

$$I_B = \frac{I}{\ln 2} \cong 1,44I . \quad (6)$$

Другими словами, число бит почти в полтора раза больше числа нат.

Как мы увидим ниже, для рассуждений в физике (а не в компьютерной технике) удобнее пользоваться информацией по Шеннону (3), т.е. измерять ее в натах. При желании с помощью (6) можно найти затем число бит, отвечающих заданной величине  $I$ . Информация по Шеннону (3) может использоваться не только для текста, но и для любой другой дискретной (цифровой) информации. Например, черно-белое изображение на телевизоре можно разложить на множество дискретных точек белого и черного цветов, а также нескольких промежуточных серых оттенков. Тогда величина (3) определит объем информации для данного мгновенного изображения на экране. Аналогичное определение годится также для цветного изображения на экране телевизора или для бумажного отпечатка из-под принтера, если соответственным образом учесть информацию цветового оттенка.

Как мы увидим ниже, информация (3) играет большую роль в физических неравновесных процессах. Подчеркнем, что речь идет именно о числовом выражении объема информации безотносительно к его смысловому содержанию.

## 2. Энтропия

Понятие энтропии — это одно из фундаментальных понятий физики. По-видимому, читатель уже знает, что это такое. Тем не менее, чтобы не нарушать связности и последовательности изложения, мы на некоторое время задержимся на разъяснении этой физической величины. При этом нам удобно будет использовать самый простой физический объект, а именно, идеальный газ.

Пусть одноатомный идеальный газ с плотностью частиц  $n$  и температурой  $T$  занимает объем  $V$ . Температуру  $T$  мы будем измерять в энергетических единицах, например в эргах, если используется система единиц СГС — сантиметр, грамм, секунда. Соответственно, в наших соотношениях не будет фигурировать постоянная Больцмана. Каждый атом газа имеет среднюю кинетическую энергию теплового движения, равную  $3T/2$ . Поэтому полная тепловая энергия газа равна

$$E = \frac{3}{2} TnV. \quad (7)$$

Как известно, давление газа равно  $p = nT$ . Если газ может обмениваться теплом с внешней средой, то закон сохранения энергии

газа выглядит как соотношение

$$dE = -p dV + dQ. \quad (8)$$

Таким образом, изменение внутренней энергии газа может происходить как за счет совершаемой им работы, так и вследствие поступления некоторого количества тепла  $dQ$  извне. Уравнение (8), как известно, выражает собой первый закон термодинамики, т.е. закон сохранения энергии. При этом предполагается, что газ находится в равновесии, т.е.  $p = \text{const}$  по всему объему газа.

Если допустить еще, что газ находится в полном термодинамическом равновесии,  $T = \text{const}$ , то соотношение (8) можно рассматривать как элементарный процесс вариации параметров газа при их очень медленном изменении, когда термодинамическое равновесие не нарушается. Именно для таких процессов и вводится понятие энтропии  $S$  с помощью соотношения

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (9)$$

Другими словами, утверждается, что у равновесного газа кроме внутренней энергии есть еще одна важная внутренняя характеристика, связанная с тепловым движением его атомов. Согласно (8), (9) при постоянном объеме  $dV = 0$ , изменение энергии пропорционально изменению энтропии, а в общем случае

$$dE = -p dV + T dS. \quad (10)$$

Так как  $p = (N/V)T$ ,  $E = (3/2)NT$ , где  $N = nV = \text{const}$  есть полное количество атомов рассматриваемого газа, то соотношение (10) можно записать в виде

$$dS = N \left( \frac{3}{2} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right). \quad (11)$$

Отсюда интегрированием (11) немедленно получаем

$$S = N \left[ \ln(VT^{3/2}) + \text{const} \right] \equiv Ns. \quad (12)$$

Постоянную интегрирования мы сохранили здесь на всякий случай, чтобы оставить себе некоторую дополнительную свободу в дальнейших рассуждениях. Как видим, энтропия газа пропорциональна числу частиц, и выражение в квадратных скобках, равное  $s$ , представляет собой энтропию, приходящуюся на одну частицу.



Если объем и температура газа изменяются таким образом, что  $VT^{3/2}$  остается постоянным, то и энтропия  $S$  не изменяется. Согласно (9) это означает, что газ не обменивается теплом с внешней средой, т.е. газ отделен от нее надежными теплоизолирующими стенками. Такой процесс получил название адиабатического. В адиабатическом процессе

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (13)$$

где  $\gamma = 5/3$  называется показателем адиабаты. Это соотношение получается из условия  $VT^{3/2} = \text{const}$  и соотношения  $p = nT$ . Как мы видим, при адиабатическом процессе температура и давление изменяются с плотностью по закону

$$T = \text{const} \times n^{\gamma-1}, \quad p = \text{const} \times n^\gamma. \quad (14)$$

### 3. Цикл Карно

В дальнейших рассуждениях нам довольно часто придется прибегать к так называемым мысленным экспериментам с различного рода идеальными процессами и идеальными устройствами. В термодинамике основным из таких идеальных устройств является тепловая машина Карно, которая позволяет совершать работу за счет тепловой энергии.

Допустим, что имеется два термостата при разных температурах  $T_1$  и  $T_2$ , причем  $T_1 > T_2$ . Первый термостат можно назвать нагревателем, а второй — холодильником. Согласно Карно, идеальный газ может быть использован как рабочее тело для производства работы за счет тепловой энергии. Допустим, что при температуре  $T_1$  объем газа равен  $V_1$ , а давление  $p = p_1 = (N/V_1)T_1$ . Здесь  $N$  — полное число частиц. С помощью адиабатического обратимого процесса рабочий газ можно охладить до температуры  $T_2$ , поскольку согласно (14) температура газа понижается при его расширении как  $T \sim V^{-\gamma+1}$ . При  $\gamma = 5/3$  имеем  $T \sim V^{-2/3}$ . Таким образом, при  $V_2/V_1 = (T_2/T_1)^{-3/2}$  газ в первом состоянии имеет температуру  $T_1$ , а во втором —  $T_2$  с адиабатическим переходом от одного состояния к другому. При адиабатическом расширении газа от начального объема  $V_1$  к конечному объему  $V_2$  газ совершает работу  $W = \int p dV$ . Поскольку согласно (13) давление изменяется пропорционально  $V^{-\gamma} = V^{-5/3}$ , т.е.

$$p = \frac{NT_1}{V_1} \left( \frac{V_1}{V} \right)^{5/3},$$

то эта работа равна

$$W = \frac{3}{2} NT_1 \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{2/3} \right] = \frac{3}{2} N(T_1 - T_2). \quad (15)$$

Согласно закону сохранения энергии именно на эту величину и уменьшается внутренняя энергия газа.

Если совершить обратное сжатие газа от объема  $V_2$  до  $V_1$ , то над газом придется совершить работу, равную (15), и энергия газа вновь восстановится. Пока здесь никакого цикла нет: это просто прямой и обратный процессы, ничего не изменяющие во внешнем мире. Цикл возникает, когда рабочее тело получает тепло от нагревателя и отдает его холодильнику. У нагревателя — это изотермическое расширение газа при температуре  $T_1$  от начального объема  $V_1$  до некоторого промежуточного объема  $V_1^*$ . Затем газ адиабатически расширяется до конечного объема  $V_2^*$  так, чтобы конечная температура была равна  $T_2$ , т.е.  $V_2^*/V_1^* = (T_2/T_1)^{-3/2}$ . После этого газ изотермически сжимается до объема  $V_2$  и адиабатически переводится в исходное состояние. Прямая и обратная работы на адиабатических участках цикла в точности компенсируют друг друга, поскольку согласно (15) работа  $W$  определяется только разностью начальной и конечной температур. А вот работы на изотермических участках цикла оказываются разными. В самом деле, если в нагревателе телу сообщается количество теплоты  $Q_1$ , то имеем  $Q_1 = T_1(S_* - S)$ , где  $S$  — начальная энтропия газа, а  $S_*$  — ее значение после подогрева. На адиабатических участках энтропия не меняется, так что в холодильнике следует уменьшить энтропию от значения  $S_*$  до  $S_1$ , передав газу отрицательное тепло (т.е. отняв тепло), равное  $Q_2 = -T_2(S_* - S)$ . При этом, поскольку на изотермических участках внутренняя энергия не меняется, разность работ  $W_1$  и  $W_2$  равна  $W = W_1 - W_2 = (T_1 - T_2)(S_* - S)$ . Теперь можно подсчитать коэффициент полезного действия цикла, равного отношению произведенной работы  $W$  к тому количеству тепла  $Q_1$ , которое было получено от нагревателя:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (16)$$

Самой важной особенностью машины Карно является ее полная обратимость, — пустив машину в обратную сторону, можно создать холодильную машину, осуществляющую перенос тепла от горячего тела к холодному за счет производимой извне работы.

Именно это обстоятельство в сочетании со вторым законом термодинамики позволяет утверждать, что (16) представляет собой максимально возможный КПД тепловой машины.

Сам второй закон термодинамики формулируется как невозможность создания вечного двигателя второго рода: нельзя осуществить такой процесс, который позволил бы совершать работу за счет тепла, ничего не изменяя при этом во внешнем мире.

Допустим на момент, что можно создать машину с КПД, большим, чем (16). Тогда такую машину можно было бы состыковать с машиной Карно в холодильном режиме. Такая комбинация машин позволила бы просто выкачивать тепловую энергию и превращать ее в работу, а это запрещено вторым началом термодинамики. Следовательно, выражение (16) представляет собой максимально возможную величину КПД для любой тепловой машины. Любопытно задаться вопросом, а что производит во внешнем мире сам цикл Карно? Машина Карно за один цикл получает энергию  $Q_1$  от нагревателя при температуре  $T_1$  и тем самым забирает у внешнего мира энтропию  $Q_1/T_1$ . Затем она передает тепло  $Q_2$  холодильнику при температуре  $T_2$  и передает энтропию  $Q_2/T_2$ . Таким образом, полное изменение энтропий, вносимое машиной Карно, равно

$$\Delta S = Q_1 T_1^{-1} - Q_2 T_2^{-1} = 0, \quad (17)$$

если учесть выражения для  $Q_1$  и  $Q_2$ . Как мы видим, машина Карно, будучи полностью обратимой, не меняет энтропию внешнего мира, хотя и переводит часть тепла в механическую работу. При этом тепло, тем не менее, перетекает от горячего тела к холодному.

#### 4. Необратимые процессы

Цикл Карно — это идеальный, мысленный, полностью обратимый процесс. Все реальные тепловые машины работают с необратимыми процессами, и поэтому желательно понять, в чем смысл такой необратимости. При этом удобно все же стартовать с машины Карно.

В цикле Карно есть адиабатические и изотермические участки. Что касается адиабатического процесса сжатия или разрежения газа, его довольно легко представить себе очень близким к обратимому. Для этого достаточно лишь иметь скорости сжатия и разрежения, значительно меньшие скорости звука, и создать достаточно хорошую теплоизоляцию, которая сама по себе обеспечивается при больших размерах газового объема. Гораздо хуже обстоит дело с изотермическими участками — ведь в них нужно обеспечить теплоприток или

теплоотток. Если на этих участках поспешить, то можно сильно потерять в КПД, поскольку у газа не будет возможности полностью реализовать всю амплитуду нагрева до температуры  $T_1$  и охлаждения до температуры  $T_2$ . В пределе очень быстрых тепловых колебаний можно потерять всю работу, способствуя лишь более быстрому перетоку тепла от горячего тела к холодному.

Давайте более подробно рассмотрим необратимый процесс перетока тепла за счет теплопроводности. А именно, пусть имеется стенка или просто стержень длиной  $L$  с температурами на концах  $T_1$  и  $T_2$ . Если теплопроводность стержня равна  $\kappa$ , то вдоль стержня перетекает тепловой поток

$$q = \kappa \frac{T_1 - T_2}{L}. \quad (18)$$

Соответственно, через каждое поперечное сечение стержня протекает поток энтропии, равный  $q_S = q/T$ . Если температура линейно зависит от координаты  $x$ :

$$T = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)x}{L}, \quad (19)$$

то поток энтропии, как функция  $x$ , равен

$$q_S = \frac{qL}{(L-x)T_1 + T_2x}. \quad (20)$$

Этот поток возрастает вдоль стержня при движении от теплого торца,  $T = T_1$ , к холодному,  $T = T_2$ . Как мы видим, на холодном торце поток энтропии в  $T_1/T_2$  раз больше, чем на горячем торце. Другими словами, внутри стержня производится избыточная энтропия, которая вытекает затем в сторону холодильника. В дополнение к входящему в стержень в единицу времени потоку энтропии  $q/T_1$  внутри стержня производится энтропия и после этого наружу выбрасывается больший поток  $q/T_2$ .

Вспомним, что машина Карно совершала работу  $W = \eta q_1 = [1 - (T_2/T_1)]q_1$ , где  $q_1$  — входящий поток. Стало быть, выходящий поток  $q_2 = q_1 - W = (T_2/T_1)q_1$  у машины Карно соответствовал отсутствию внутреннего рождения энтропии. А если КПД будет меньше, то тепловая машина будет производить энтропию, равную

$$\frac{q_2}{T_2} - \frac{q_1}{T_1} = \frac{1}{T_2}(q_1 - \eta q_1) - \frac{q_1}{T_1} = \frac{q_1}{T_2}(\eta_C - \eta). \quad (21)$$

Здесь  $\eta_C = 1 - (T_2/T_1)$  — коэффициент полезного действия цикла Карно, а  $\eta$  — реальный коэффициент полезного действия. Если  $\eta = 0$ , то работа не совершается,  $W = 0$ , и  $q_2 = q_1 = q$ . В этом случае чистый тепловой поток, не производя никакой работы, "занимается" просто тепловым "загрязнением" среды, производя в ней энтропию с темпом

$$q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Итак, тепловой поток сам по себе приводит к тому, что энтропия среды возрастает, и этот процесс будет продолжаться вплоть до полного выравнивания температур горячего и холодного тел.

## 5. Энтропия и информация

Действуя в духе идеальных мысленных экспериментов, рассмотрим теперь случай, когда весь наш идеальный газ состоит только из одной частицы. Поначалу кажется, что это абсолютно абсурдный подход, но не будем слишком поспешны в своих суждениях. Если одна частица заключена в сосуде объемом  $V$  со стенками, находящимися при температуре  $T$ , то рано или поздно она придет в равновесие с этими стенками. В каждый момент времени она, разумеется, находится в одной определенной точке пространства и имеет вполне определенную скорость. Однако мы можем условиться проводить все процессы настолько медленно, что частица не только успеет в среднем заполнить все пространство объема  $V$ , но и сможет многократно поменять величину и направление скорости при неупругих столкновениях со стенками сосуда. В этом случае можно говорить о частице, имеющей максвелловское распределение по скоростям и в среднем равномерно заполняющей сосуд. Здесь очень важным является условие, что мы ничего не хотим знать о частице кроме того, что она соударяется со стенками и оказывает на них среднее давление и что ее распределение по скоростям является максвелловским с температурой  $T$ .

Теперь мы можем, например, адиабатически сжимать эту частицу, и в среднем ее действие на стенки будет в точности таким же, как у  $N$  частиц, но только в  $N$  раз меньшим. Не спеша можно изменять и температуру частицы, соответствующим образом меняя температуру стенок сосуда и давая возможность частице прийти в тепловое равновесие со стенками.

Среднее давление одной частицы на стенку при  $N = 1$  равно, очевидно,  $p = T/V$ , а средняя плотность  $n = 1/V$ . Для этой частицы мы опять можем организовать цикл Карно и тем самым создать

идеальную тепловую микромашину, полностью обратимую и имеющую КПД  $\eta = 1 - (T_2/T_1)$ . Теперь с помощью некоторых идеальных устройств и с привлечением второго начала термодинамики мы постараемся установить связь между энтропией и информацией. Начнем с самого простого случая изотермических процессов. Итак, положим  $T = \text{const}$ . С помощью первого начала термодинамики при  $T = \text{const}$  и соотношения  $p = T/V$  получаем

$$T dS = p dV = T \frac{dV}{V}. \quad (22)$$

Здесь следовало бы использовать малую букву  $s$  для удельной энтропии, но мы сохранили обозначение  $S$ , чтобы перейти затем к более общим соотношениям.

Отсюда находим, что изменение энтропии не зависит от величины  $T$ , так что можно положить

$$S = \ln \frac{V}{V_0}. \quad (23)$$

Здесь небольшой объем  $V_0 \ll V$  мы ввели намеренно — просто для нормировки: величина  $V_0$  должна быть заметно больше размера частицы, чтобы не нарушалось приближение идеального газа.

Работа изотермического процесса тоже выглядит довольно просто

$$W = \int p dV = T \int \frac{dV}{V} = T \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (24)$$

Как мы видим,  $W = T(S_2 - S_1)$ , т.е. работа выражается просто через разность соответствующих энтропий. Подчеркнем еще раз, что мы имеем в виду очень медленный полностью обратимый процесс.

Продолжим наши идеальные мысленные эксперименты. Допустим, что у нас есть идеальные перегородки, которыми мы можем делить сосуд на части без затраты энергии или рождения новой энтропии. Разделим наш сосуд на две равные части с объемом  $V/2$  каждая. Частица при этом остается в одной из половин, но в какой из них, мы пока не знаем. Допустим теперь, что у нас имеется средство или некоторый измерительный прибор, с помощью которого можно определить, где именно находится частица. Например, мы смогли бы обнаружить ее в одной из половин с помощью пружинных весов в поле силы тяжести или просто по факту исчезновения давления на перегородку со стороны пустого полуобъема. Если это так, то из начального симметричного распределения вероятностей 50% на

50 % нахождения в двух половинах мы получим вероятность 100 % для одной из половин. Происходит как бы "стягивание", или "коллапс", распределения вероятностей. Соответственно, и новая энтропия  $S_2 = \ln(V/2V_0)$  оказывается меньше исходной энтропии на величину  $\Delta S = \ln 2$ . За счет уменьшения энтропии можно совершить механическую работу. Для этого достаточно сдвигать перегородку в сторону пустого объема вплоть до полного его исчезновения, когда частица вновь займет полный объем. Соответствующая работа равна  $W = T\Delta S = T\ln 2$ . Если при этом во внешнем мире ничего бы больше не менялось, то повторяя эти циклы, можно построить вечный двигатель второго рода. Но поскольку второй закон термодинамики запрещает получение работы просто за счет тепла, то во внешнем мире должно что-то происходить. Что же происходит еще? Обнаружение частицы в одной из половин меняет информацию о частице. А именно, из двух возможных половинок указывается только одна, в которой находится частица. Это знание соответствует в точности одному биту информации. Процесс измерения уменьшает энтропию частицы и ровно настолько же увеличивает информацию измерительного прибора. Если совершать повторные деления пополам полученных ранее половинок, четвертушек, восьмушек и т.д., то энтропия будет последовательно уменьшаться, а информация увеличиваться. Другими словами,

$$S + I = \text{const.} \quad (25)$$

Чем больше известно о частице, или в более общем случае о физической системе, тем меньше ее энтропия.

Но теперь мы можем сделать вывод, что появление информации во внешнем мире (или внешних приборах) невозможно без возрастания энтропии внешнего окружения на величину, не меньшую  $\Delta I$ . В противном случае с помощью нашей обратимой тепловой микромашины можно было бы черпать энергию прямо из тепловой энергии. Другими словами, информация, т.е. определенная порция порядка, может быть усвоена внешними приборами, автоматами или просто внешним миром только за счет появления во внешнем окружении дополнительного беспорядка (теплого движения) с возрастанием энтропии не меньшим, чем усвоено информации.

Внешний прибор или среду, которая воспринимает информацию и может ее использовать для последующих действий, можно условно назвать демоном Максвелла. Именно для сходной ситуации Максвелл и придумал своего демона: если демон может отличать горячие частицы от холодных, то с помощью перекрытия отверстия заслон-

кой он сможет перекачать тепло от холодного газа к горячему. Приведенные здесь рассуждения аналогичны демону Максвелла. Они опираются на универсальный второй закон термодинамики. Именно второе начало термодинамики требует, чтобы демон сам увеличивал энтропию в процессе "трудов тяжких" по распознаванию информации  $I$ .

Согласно (25) сумма  $S$  и  $I$  постоянна. Если в нашей модели частицу удастся поместить в элементарную ячейку объема  $V_0$ , то при этом  $S = 0$ , а информация достигает своего максимального значения  $I_{\max} = -\ln p_{\min} = \ln(V/V_0)$ , поскольку вероятность  $p_{\min}$  найти частицу в данной ячейке равна отношению объемов:  $p_{\min} = V_0/V$ . Для того чтобы зафиксировать частицу в элементарном объеме, т.е. усвоить информацию  $I = \ln(V/V_0)$ , потребуется произвести не меньшее количество энтропии в приборе или за его пределами. Если в последующем частица начнет заполнять (в среднем) больший объем, информация будет постепенно утрачиваться, а энтропия частицы возрастать.

Еще раз подчеркнем, что за информацию приходится "платить" увеличением энтропии  $S_e$  внешних систем, причем  $\Delta S_e \geq I$ . В самом деле, если бы за один бит информации прибор увеличивал бы свою энтропию на величину  $\Delta S_e$ , меньшую одного бита, то мы могли бы обратить тепловую машину. А именно, расширяя полуобъем, занятый частицей, мы увеличили бы ее энтропию на величину  $\ln 2$ , получая работу  $T \ln 2$ , а суммарная энтропия системы частица плюс прибор уменьшилась бы. Но это невозможно по второму закону термодинамики.

До сих пор мы рассуждали об энтропии, связанной с пространственной локализацией частицы. Но то же самое рассуждение можно повторить и в отношении измерения скорости. Удобно выбрать случай только одного измерения, например движения только по оси  $x$ .

Допустим, что у нас имеется прибор, который может измерять  $x$ -компоненту скорости частиц  $u$  с точностью  $\Delta u$ . Удобно считать, что  $\Delta u$  пропорциональна  $u$ , чтобы ввести некоторое единообразие в последующих оценках. Допустим, что в трубу длиной  $L$  вдоль оси  $x$  влетает частица со скоростью  $u$ , и на влете ее скорость измеряется с точностью  $\Delta u$ . Выждав время  $t = L/u$ , можно ввести заслонку на расстоянии  $\Delta L \sim L\Delta u/u$  от закрытого торца и запереть там частицу. Мерой локализации служит величина  $\Delta L/L$ , примерно одна и та же для всех частиц максвелловского распределения. Такая локализация вновь уменьшает энтропию на величину  $\ln(L/\Delta L)$ , и в соответствии со вторым законом термодинамики она обязательно должна сопровождаться возрастанием энтропии в приборе, измеряющем скорость частицы. Другими словами, любое измерение, которое увеличивает



информацию о частице, должно обязательно сопровождаться увеличением энтропии прибора или окружения. Это своеобразная "плата за знание" (более подробно см. в [16–21]).

## 6. Энтропия еще раз

Соотношение (25) наводит на мысль, что энтропия физической системы связана каким-то образом с распределением вероятностей. И это на самом деле так, что подробно излагается в книгах и учебниках по статистической физике. Мы здесь кратко познакомим читателя с этим вопросом опять-таки на самом простом примере идеального газа.

В статистической физике существует знаменитая формула Больцмана — энтропия равна логарифму числа состояний  $\Gamma$ , которые может принимать данная физическая система:

$$S = \ln \Gamma. \quad (26)$$

Отметим еще раз, что мы используем здесь энергетические единицы для измерения температуры, и поэтому в приведенной формуле отсутствует постоянная Больцмана.  $\Gamma$  — это число возможных микроскопических состояний, которые отвечают одному и тому же макроскопическому состоянию. Предполагается, что при тепловом движении система пробегает все возможные состояния с примерно одинаковой вероятностью. Соответственно, вероятность  $p_i$  отдельного состояния приблизительно равна  $p_i \approx 1/\Gamma$ . Если вероятности отдельных состояний различаются, то более точное определение для энтропии выглядит следующим образом:

$$S = - \sum_i p_i \ln p_i = - \langle \ln p_i \rangle. \quad (27)$$

Здесь угловые скобки означают математическое ожидание, т.е. среднее значение.

Для идеального газа вероятности  $p_i$  распадаются на конфигурационную и скоростную части, т.е. на вероятности распределения по пространству и по скоростям. Число возможных состояний в пространстве объема  $V$  для  $N \gg 1$  частиц можно опять найти, вводя элементарный объем  $V_0$ . Кажется, что число таких состояний равно просто  $(V/V_0)^N$ . Однако это не совсем так: атомы газа одинаковы и поэтому их перестановка между собой не создает нового состояния. Поэтому приведенное выше число нужно разделить еще на  $N! \cong N^N$ , где в формуле Стирлинга для  $N!$  сохранен только главный член. Что касается скоростной части  $\Gamma$ , то она равна просто  $-N \langle \ln f_0 \rangle$ , где  $f_0$  —

функция Максвелла для распределения одного из атомов по скоростям:

$$f_0(\mathbf{v}) = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m\mathbf{v}^2}{2T} \right). \quad (28)$$

Здесь  $m$  — масса атома,  $\mathbf{v}$  — вектор скорости. Итак, по формуле (27) получаем для идеального газа

$$S = N \left[ \ln \frac{V}{NV_0} + \ln(c_0 T)^{3/2} \right]; \quad (29)$$

здесь  $c_0 = 2\pi e/m$  — просто постоянный множитель, появившийся при усреднении  $\ln f_0$ ,  $e$  — основание натурального логарифма. В отличие от найденного ранее термодинамического выражения (12) в формуле (29), как мы видим, имеется явное выражение для константы интегрирования, а именно, в формуле (12)  $\text{const} = \ln(c_0/NV_0)$ .

Формально выражение (3) для информации и (27) для энтропии тождественны между собой. Но они имеют совершенно различный смысл. А именно, информация (3) соответствует одной-единственной выборке из огромного, скажем  $\Gamma$ , числа возможных состояний. И мера этой информации есть  $I = \ln \Gamma$ . Энтропия же соответствует возможности нахождения системы с некоторой вероятностью  $1/\Gamma$  в каждом из доступных состояний. Величина  $S = \ln \Gamma$  соответствует максимальному "заполнению" всех состояний. Величины  $I$  и  $S$  оказались формально равными именно потому, что  $I$  отвечает максимальной информации только одного состояния, а  $S$  определена по множеству всех состояний.

Пусть, например, объем информации  $I$  соответствует тексту данной главы. А энтропия этого текста равна нулю, так как мы имеем только одну фиксированную последовательность написания букв и других типографских знаков и, стало быть,  $\Gamma = 1$ . Допустим теперь, что весь текст пришел в "тепловое движение", в результате которого буквы начинают быстро перепрыгивать, меняясь местами. Очень скоро вся информация будет полностью потеряна, но зато в тепловом движении будут пробегаться все возможные состояния из общего числа  $\Gamma$ , т.е.  $S = \ln \Gamma$ . В промежуточном варианте, когда часть текста сохраняется, а другая часть переходит в полностью хаотическое "тепловое движение", мы приходим к соотношению (25):  $S + I = \text{const}$ . Энтропия и информация замкнутой системы оказываются как бы взаимными по отношению друг к другу: "забывание" информации автоматически приводит к увеличению энтропии.

В соответствии со вторым началом термодинамики энтропия замкнутой системы не может убывать со временем. В рассмотренном примере это означает, что граница между "тепловой" и "информационной" частями текста может естественно передвигаться только в одном направлении, а именно, в сторону забывания информации. Новая часть информации, т.е. осмысленное "замораживание" части текста может происходить только за счет дополнительного стирания некоторого куска основного текста, если этот процесс происходит без внесения дополнительной информации извне. Порядок может возникать только за счет уничтожения другого порядка (в замкнутой системе).

Из этих рассуждений видно, что вопросы анализа порядка и рождения новой информации требуют, как правило, выхода за пределы некоторой изолированной физической системы. Поэтому основными для нас будут открытые неравновесные системы, к рассмотрению которых мы будем переходить шаг за шагом, от простого к сложному.

## 7. Управление

В продолжение наших идеальных мысленных экспериментов рассмотрим еще одну постановку задачи. Пусть рассматриваемая нами частица совершает броуновское движение на плоскости  $x, y$ . Распределение вероятностей ее положения на плоскости подчиняется уравнению Фоккера–Планка, которое в простейшем варианте выглядит, как уравнение диффузии:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\Delta p. \quad (30)$$

Здесь  $p(x, y, t)$  — плотность вероятности для положения частицы на плоскости,  $\Delta$  — двумерный лапласиан,  $D$  — коэффициент диффузии. Для решения в виде функции точечного источника имеем

$$p = \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4Dt}\right). \quad (31)$$

С помощью этого выражения находим выражение для энтропии:

$$s = \int p \ln p \, dr = \ln(4\pi eDt).$$

Здесь  $e$  — основание натуральных логарифмов, при этом мы учли, что величина  $\langle x^2 + y^2 \rangle = 4Dt$ .

Выберем некоторое значение  $t = t_0$ , соответствующее локализации частицы, описываемой средним значением  $\langle x^2 + y^2 \rangle = 4Dt_0$ . Подождем теперь некоторое время  $\Delta t = t - t_0$ , равное  $t_0$ . За это время энтропия возрастет на величину  $\Delta s = \ln 2$ . Допустим теперь, что у нас есть устройство, которое может автоматически перемещать кювету с жидкостью, в которой находится броуновская частица. Это устройство может центрировать положение частицы и вновь восстановить ее прежнюю локализацию. Но для этого нужно измерить положение частицы с точностью, не меньшей величины этой локализации. Для восприятия этой информации и для последующего ее использования при перемещении кюветы энтропию прибора следует увеличить на величину, не меньшую  $\ln 2$ .

Итак, если с помощью этого устройства осуществлять контролируруемую локализацию частицы, то можно приостановить рост энтропии самой частицы, но только за счет постоянного рождения энтропии внутри или вне прибора с темпом  $\dot{s}$ , не меньшим  $\ln 2/t_0$ . Диссипация и соответствующая ей необратимость как бы перебрасываются за пределы кюветы с броуновской частицей.

Они переносятся в систему управления положением частицы. А сама частица превращается в открытую систему, из которой постоянно удаляется "шлак" избыточной энтропии, возникающей за счет диссипации. При этом суммарная энтропия частицы и устройства контроля, разумеется, возрастает, но это возрастание происходит где-то вдали от интересующего нас объекта. Данный пример показывает, что рождение энтропии не обязательно должно происходить строго локально, а может осуществляться где-то далеко от рассматриваемой системы.

## 8. Газодинамика

На первый взгляд кажется, что диссипация должна всегда и неуклонно приближать физическую систему к термодинамическому равновесию. В каком-то смысле это так, но реальные процессы могут быть гораздо сложнее, и это видно на простейшем примере газодинамики.

В общем случае поведение разреженного газа хорошо описывается кинетическим уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f = \text{St}(f). \quad (32)$$

Здесь  $f$  — локальная функция распределения частиц по скоростям, а  $\text{St}(f)$  — член столкновений. Именно столкновения и осуществляют

приближение к локальному равновесию, т.е. диссипацию. Если столкновения достаточно часты, то функция распределения становится максвелловской:

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T} \right]. \quad (33)$$

Здесь  $n$ ,  $T$ ,  $\mathbf{u}$  — локальные значения плотности, температуры и средней скорости. Для максвелловской функции распределения имеем полное локальное равновесие, т.е.  $\text{St}(f_0) = 0$ . Но если  $n$ ,  $T$ ,  $\mathbf{u}$  являются функциями координат и времени, то левая часть (32) при подстановке  $f = f_0$  не обратится в нуль. Это значит, что полного термодинамического равновесия нет, хотя член столкновений интенсивно пытается это равновесие установить. Нетрудно заметить, что изменение величин  $n$ ,  $T$ ,  $\mathbf{u}$  во времени должно подчиняться определенным связям, налагаемым самим видом уравнения (32). Дело в том, что член столкновений устроен таким образом, что он сохраняет число частиц, их суммарный импульс и суммарную энергию. Поэтому и левая часть уравнения (32) должна подчиняться этим ограничениям.

Проинтегрируем, например, уравнение (32) по скоростям. Предполагая, что  $f$  совпадает с  $f_0$ , получим

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{u}) = 0. \quad (34)$$

Это уравнение непрерывности учитывает тот факт, что член столкновений не уничтожает и не рождает новые частицы. Если умножить теперь (32) на  $m\mathbf{v}$  и снова проинтегрировать по  $\mathbf{v}$  с учетом  $f = f_0$ , то, принимая во внимание (34), получим уравнение Эйлера

$$mn \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0, \quad (35)$$

где оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla),$$

а величина  $p = nT$  представляет собой локальное давление газа.

Аналогичным образом, умножая (33) на  $m\mathbf{v}^2/2$  и интегрируя его по скоростям в предположении  $f = f_0$ , можно с учетом (34), (35) получить

соотношение

$$\frac{dp}{dt} + \frac{5}{3} p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (36)$$

где  $p = nT$ .

Таким образом, вместо уравнения Больцмана мы получили систему уравнений (34) – (36) для двух скалярных и одной векторной величины, а вместо шестимерного фазового пространства оказалось возможным использовать обычное конфигурационное пространство.

Уравнения идеальной газодинамики тем точнее, чем больше  $St(f)$ , т.е. чем чаще происходят столкновения между атомами. Математически это означает, что уравнения гидродинамики представляют собой асимптотическую форму уравнения Больцмана при  $St \rightarrow \infty$ . Столкновения сами по себе выделили нам набор величин  $n, T, \mathbf{u}$ , превратившихся в динамические переменные. Их можно назвать параметрами порядка, поскольку они служат основной характеристикой локального термодинамического равновесия.

Переменные  $n, T, \mathbf{u}$  можно рассматривать как гладкие функции координат. Их поведение определяется уравнениями газовой динамики. Разумеется, на фоне этой динамики присутствуют малые термодинамические флуктуации, обязанные дискретной структуре атомарного газа, но не они нам сейчас интересны. Уравнениями газовой динамики, нелинейными по своей структуре, естественно пользоваться для описания таких процессов, когда изменение в пространстве и времени соответствующих динамических переменных  $n, T, \mathbf{u}$  существенно превосходит термодинамический фон обычных флуктуаций. Следовательно, мы можем говорить о состояниях и процессах, очень далеких от термодинамического равновесия.

Уравнения газовой динамики представляют собой лишь простейший пример описания физических систем, далеких от равновесия. И в других неравновесных физических системах довольно часто возникают ситуации, когда сами собой возникают некоторые параметры порядка, которые начинают затем играть роль динамических переменных. Наша задача будет заключаться в качественном описании таких динамических систем с учетом роли информационных процессов.

Как мы уже имели возможность убедиться ранее, информационные процессы очень тесно переплетены с диссипативными необратимыми процессами в системах, далеких от термодинамического равновесия. Мы будем разбираться в этих вопросах, по возможности, шаг за шагом, от простого к сложному.

## 9. Волны

Весьма широкий класс газодинамических процессов составляют течения или колебания газа со скоростями, значительно меньшими скорости звука. Сюда включается и собственно звук с малой амплитудой и несжимаемые течения с  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ . С последними мы встретимся позднее, а сейчас познакомимся со звуком. Будем считать, что амплитуда колебаний мала, так что отклонения плотности  $\tilde{n} = n - n_0$  и давления  $\tilde{p} = p - p_0$  от их равновесных значений  $n_0, p_0$  малы. Считая малой также и скорость  $\mathbf{u}$ , уравнения газодинамики можно линеаризовать. А решения линейных однородных уравнений всегда можно считать составленными из элементарных решений типа плоских волн  $\exp(-i\omega + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор. Для плоской волны уравнения (34)–(36) примут вид

$$\omega \tilde{n} = n_0 \mathbf{k} \mathbf{u}, \quad m n_0 \omega \mathbf{u} = \mathbf{k} \tilde{p}, \quad \omega \tilde{p} = \gamma p_0 \mathbf{k} \mathbf{u}. \quad (37)$$

Здесь  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты. Из двух последних уравнений (37) находим

$$\omega^2 - c_s^2 k^2 = 0, \quad (38)$$

где  $c_s = (\gamma p_0 / m n_0)^{1/2}$  — скорость звука.

Соотношение (38), связывающее между собой частоту и волновой вектор, называется дисперсионным уравнением. Отметим, что согласно второму из уравнений (37) перемещение среды происходит по направлению волнового вектора. Сравнивая первое и третье уравнения (37), мы видим, что

$$\frac{\tilde{p}}{p_0} = \frac{5}{3} \frac{\tilde{n}}{n_0}.$$

А так как  $p = nT$ , то отсюда следует, что при распространении звука возникает возмущение температуры, так что  $\tilde{T}/T_0 = (2/3)\tilde{n}/n_0 = (\gamma - 1)\tilde{n}/n_0$ . Это вполне естественно, так как давление газа при идеальных звуковых колебаниях изменяется по закону адиабаты.

Найдем теперь выражение для плотности импульса  $P$  и плотности энергии  $\epsilon$  звуковой волны. Обозначая угловыми скобками усреднение по пространству, получаем во втором приближении по амплитуде колебаний

$$\mathbf{P} = \langle m n \mathbf{u} \rangle = \langle m \tilde{n} \mathbf{u} \rangle = \frac{\mathbf{k}}{\omega} m n_0 \langle u^2 \rangle, \quad (39)$$

где  $u$  — компонента скорости вдоль  $\mathbf{k}$ .

Здесь мы воспользовались первым соотношением (37), чтобы выразить  $\ddot{\eta}$  через  $u$ . Что касается энергии колебаний, то она складывается из кинетической и потенциальной энергий. Потенциальную энергию легко найти, если два последних уравнения (37) записать в виде более простого соотношения

$$\ddot{\xi} = -\alpha \xi, \quad (40)$$

где  $\alpha = k^2 c_s^2$ ,  $\xi$  — смещение среды, т.е.  $\dot{\xi} = u$ , а  $u$  — компонента скорости  $\mathbf{u}$  по направлению волнового числа (только она и испытывает колебания). Для волны с заданным волновым числом мы имеем просто гармонический осциллятор, а у него средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии. Таким образом, имеем просто

$$\varepsilon = mn_0 \langle u^2 \rangle. \quad (41)$$

Сравнивая между собой выражения (39), (41), мы видим, что имеет место замечательное соотношение

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \varepsilon = \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{1}{v_\varphi} \varepsilon, \quad (42)$$

где  $v_\varphi = \omega/k$  есть фазовая скорость волны. Это очень важное соотношение. Оно имеет гораздо более общий характер и относится не только к звуковой волне, но и к любым другим волнам малой амплитуды в изотропных средах. Поясним, что оно означает.

Любую продольную волну можно возбудить силой, которая прикладывается вдоль волнового вектора в резонансе с волной. Пусть эта сила  $\mathbf{F}$ , рассчитанная на единицу объема среды, движется с фазовой скоростью  $v_\varphi$ . За время  $t$  приложенная извне сила приведет к появлению импульса  $\mathbf{P} = \mathbf{F}t$ . В то же время эта сила совершит работу  $W = \mathbf{F}s$ , где  $s = v_\varphi t$  — путь, пройденный точкой волны с одной и той же резонансной фазой. Но по закону сохранения энергии  $W = \varepsilon$ , так что  $\varepsilon = v_\varphi P$ .

Любопытно рассмотреть, что происходит с волной при движении среды, скажем, со скоростью  $\mathbf{v}_0$  вдоль оси  $z$ . В выражении  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , описывающем распространение волны в неподвижной среде, мы должны заменить  $\mathbf{r}$  на  $\mathbf{r} + \mathbf{v}_0 t$ , и тогда получим новую экспоненту  $\exp(-i\omega' t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где

$$\omega' = \omega - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}_0 = \omega - k_z v_0. \quad (43)$$



Это хорошо известный доплеровский сдвиг частоты. Вместе с частотой меняется и плотность энергии:

$$\varepsilon' = \varepsilon - \mathbf{P}\mathbf{v}_0 = \frac{\omega'}{k} P. \quad (44)$$

Здесь  $\varepsilon$  — плотность энергии волны в системе координат, движущейся вместе со средой, а  $\varepsilon'$  — плотность энергии в лабораторной системе. Согласно (44) при  $\omega' = 0$  плотность энергии  $\varepsilon'$  обращается в нуль. Такую волну можно возбуждать без затраты энергии. Для звуковой волны с  $\omega = kc_s$  условие  $\omega' = 0$  согласно (43) выглядит как

$$\cos \theta \equiv \frac{k_z}{k_0} = \frac{c_s}{v_0}. \quad (45)$$

Это хорошо известное условие черенковского излучения. В случае звуковой волны условие (45) определяет раствор конуса Маха.

При достаточно большой скорости среды частота  $\omega'$  может оказаться отрицательной. При этом и энергия волны в лабораторной системе координат становится отрицательной: для возбуждения волны потребуется не сообщать энергию среде, а отбирать ее от среды. В этом случае говорят об аномальном эффекте Доплера.

Соотношения для энергии и импульса волны удобно представить несколько в другом виде. Допустим для простоты, что волна распространяется вдоль оси  $x$ . Скорость колебаний среды для волны с данным волновым числом  $k$  можно представить в виде

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} u_k \exp(-i\omega_k t + ikx) + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{-k} \exp(-i\omega_{-k} t - ikx),$$

где  $u_{-k}$ ,  $\omega_{-k}$  означают просто соответствующие величины для амплитуды и частоты при множителе с отрицательным волновым числом  $-k$ . Но так как  $u$  должна быть действительной величиной, то  $u_{-k} = u_k^*$ ,  $\omega_{-k} = -\omega_k$ . Нетрудно видеть, что среднее по  $x$  значение квадрата скорости

$$\langle u^2 \rangle = u_k u_k^* = |u_k|^2.$$

Выберем теперь некоторую определенную точку на оси  $x$ , скажем,  $x = 0$ . Тогда скорость и в этой точке можно представить в виде

$$u = \left( \frac{\omega_k}{2mn_0} \right)^{1/2} a_k(t) + \left( \frac{\omega_k}{2mn_0} \right)^{1/2} a_k^*(t), \quad (46)$$

где амплитуды  $a_k, a_k^*$  (их называют фазорами) даются выражениями

$$a_k = \left( \frac{mn_0}{\omega_k} \right)^{1/2} u_k \exp(-i\omega_k t), \quad (47)$$

$$a_k^* = \left( \frac{mn_0}{\omega_k} \right)^{1/2} u_k^* \exp(-i\omega_k t).$$

Плотность энергии волны выражается через амплитуды  $a_k, a_k^*$  очень простым образом, а именно,  $\varepsilon_k = mn_0 \langle u^2 \rangle = \omega_k a_k a_k^*$ . Скорость  $u$  в точке  $x = 0$  можно представить также в виде

$$u_k = \left( \frac{\omega_k}{2mn_0} \right)^{1/2} \left( X_k \cos \omega_k t + Y_k \sin \omega_k t \right).$$

Коэффициенты  $X_k, Y_k$  называются квадратурными компонентами, потому что разность фаз между косинусом и синусом равна  $\pi/2$ . Нетрудно проверить, что

$$X_k = \frac{1}{2}(a_k + a_k^*), \quad Y_k = \frac{1}{2i}(a_k - a_k^*).$$

Поскольку плотность импульса  $P_k$  выражается через плотность энергии как

$$P_k = \frac{k}{\omega_k} \varepsilon_k,$$

то с помощью амплитуд  $a_k, a_k^*$  находим простое выражение для  $P_k$ :  $P_k = k a_k a_k^*$ . Введем теперь вспомогательную функцию  $\psi(x, t)$ , определяемую соотношением

$$\psi = \left( \frac{mn_0}{\omega_k} \right)^{1/2} u_k \exp(-i\omega_k t + ikx). \quad (48)$$

Нетрудно видеть, что имеют место соотношения

$$\varepsilon = \omega_k |\psi|^2, \quad \mathbf{P} = \mathbf{k} |\psi|^2. \quad (49)$$

Другими словами, величину  $|\psi|^2$  можно интерпретировать как некоторое условное "число волн" в единице объема. Плотность энергии и плотность импульса получаются простым умножением "элементарной энергии"  $\omega_k$  и "элементарного импульса"  $\mathbf{k}$  на условную "плотность волн".

Выражения (49) легко обобщаются на волновые пакеты, когда величина  $|\psi|^2$  локализована в некоторой сравнительно широкой области пространства, обращаясь в нуль за пределами этой области.

В этом случае выражение (49) можно проинтегрировать по пространству и получить значения полной энергии и полного импульса для волнового пакета.

Заметим, что соотношения (49) могут быть распространены на любые волны малой амплитуды, поскольку выражение  $\mathbf{P} = (\mathbf{k}/\omega_k)\epsilon$  является универсальным. Соответственно, значение собственной частоты  $\omega_k$  в выражении (49) не обязательно должно быть равно  $c_s k$ , как для звуковой волны, а может определяться соответствующими дисперсионными соотношениями для любой однородной среды.

Согласно дисперсионному уравнению (39) для каждого значения волнового вектора  $\mathbf{k}$  можно найти два значения частоты:  $\omega = c_s k$  и  $\omega = -c_s k$ . Соответственно, допускается существование двух волн: одна распространяется вдоль  $\mathbf{k}$ , а другая — в противоположном направлении. Для одной из волн дисперсионное уравнение (если корень не кратный) записывается в виде  $\omega = \omega_k$ , где  $\omega_k$  — соответствующее собственное значение для частоты. А для суперпозиции таких волн, принадлежащих одной и той же ветви колебаний, мы имеем соотношение

$$\sum_{\mathbf{k}} (\omega - \omega_{\mathbf{k}}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (50)$$

Здесь  $\psi_{\mathbf{k}}$  — это элементарная плоская волна, отвечающая зависимости  $\psi_{\mathbf{k}} \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Легко видеть, что

$$\omega = i \frac{\partial}{\partial t},$$

так что для  $\psi(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}$  имеем

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) \equiv H\psi. \quad (51)$$

Выражение в правой части уравнения (51) можно рассматривать как результат действия некоторого оператора  $H$  на пространственные координаты функции  $\psi$ . Например, для звуковой волны, распространяющейся вдоль  $x$ , частота  $\omega_{\mathbf{k}} = kc_s$ , так что  $H = -ic_s \partial/\partial x$ . Для других волн выражение для  $H$  может быть более сложным. Мы рассмотрим здесь лишь один частный случай, а именно, эволюцию огибающей волнового пакета.

Введем на некоторое время обозначение  $\psi'$  для волновой функции (это самый простой термин для названия  $\psi'$ ):  $\psi' = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}$ . Пусть теперь  $\psi' = \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)$ . Здесь  $\omega_0 = \omega_{\mathbf{k}} (k = k_0)$  — частота волны с волновым числом  $k = k_0$ , а функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$  играет роль амплитуды, т.е. огибающей волны с заданными  $k = k_0$  и  $\omega = \omega_0$ . Будем считать, что  $\psi(\mathbf{r}, t)$  является плавной функцией переменных  $\mathbf{r}, t$ . Тогда разложение  $\psi(\mathbf{r}, t)$  в сумму гармоник типа  $\exp(-i\mathbf{v}t + i\mathbf{m}\mathbf{r})$  будет содержать частоты  $\nu \ll \omega_0$  и волновые векторы с  $\kappa \ll k_0$ . Пользуясь этим, воспользуемся разложением  $\omega_{\mathbf{k}}$  в ряд Тейлора по  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ :

$$\omega_{\mathbf{k}} \cong \omega_0 + v_g \kappa_x + \frac{1}{2} v'_g \kappa_x^2 + \frac{1}{2k_0} v_g \kappa_{\perp}^2. \quad (52)$$

Здесь

$$v_g = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}}}{\partial k}, \quad v'_g = \frac{\partial v_g}{\partial k} = \frac{\partial^2 \omega_{\mathbf{k}}}{\partial k^2},$$

а член с  $\kappa_{\perp}^2$  появился из-за того, что

$$k = (k_x^2 + \kappa_{\perp}^2)^{1/2} \cong k_x + \frac{1}{2k_0} \kappa_{\perp}^2.$$

Если подставить полученные соотношения в (51), то после сокращения на общий фазовый множитель  $\exp(-i\omega_0 t + ik_0 x)$  получим

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = i v_g \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} v'_g \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2k_0} v_g \Delta_{\perp} \psi. \quad (53)$$

Это уравнение описывает эволюцию огибающей волнового пакета. Оно называется параболическим уравнением Леонтовича. Если пространственные размеры волнового пакета очень велики, то двумя последними членами в правой части (53) можно пренебречь, и тогда волновой пакет просто переносится с групповой скоростью  $v_g = \partial \omega_x / \partial k$ . Заметим, что поскольку уравнение (53) написано для огибающей, абсолютная фаза комплексной амплитуды  $\psi$  перестала иметь смысл: замена  $\psi$  на  $\psi \exp(i\alpha)$ , где  $\alpha = \text{const}$ , оставляет уравнение (53) неизменным.

## 10. Корреляционная функция

В реальных условиях нередко возникают ситуации, когда возбуждается сразу много волн с различными частотами и амплитудами. Например, в случае звуковых волн — это шум большого города или

большого скопления людей на вокзале. Большой набор волн можно считать волновым хаосом, и для его описания могут быть использованы методы статистической физики. Чтобы познакомиться с элементами такого описания, рассмотрим простейший случай одной ветви колебаний в одномерной среде. Соответствующие рассуждения можно опять проводить с использованием волновой функции  $\psi(x, t)$ , поскольку в линейных волнах все остальные физические величины, испытывающие малые колебания, можно выразить через  $\psi$ . Итак, пусть

$$\psi(x, t) = \sum_k a_k \exp(-i\omega_k t + ikx), \quad (54)$$

где  $a_k$  — амплитуда волны с волновым числом  $k$ , а  $\omega_k$  — соответствующая частота колебаний. Среднее по времени и по пространству значение от  $\psi(x, t)$ , очевидно, равно нулю. А если волн много и их фазы меняются со временем, то и средние значения  $\langle a_k \rangle$  можно считать равными нулю. Это приближение называется приближением хаотических фаз. Но если взять произведение  $a_k a_k^*$ , то его среднее значение не зависит от фазы, так что можно считать  $\langle a_k a_k^* \rangle \equiv a_k^2$ , где  $a_k^2$  — некоторое среднее значение квадрата амплитуды. Величина  $a_k^2$  как функция  $k$  называется спектральной функцией, или попросту спектром.

Найдем теперь величину  $\langle \psi(x, t) \psi^*(x', t') \rangle$ , где угловые скобки означают усреднение по случайным фазам и амплитудам элементарных волн. Эта величина называется корреляционной функцией. Если подставить сюда суммы (54) для  $\psi$  и  $\psi^*$  и учесть, что после усреднения по фазам остаются только произведения  $a_k a_k^*$ , то получим

$$\langle \psi(x, t) \psi^*(x', t') \rangle = \sum_k a_k^2 \exp[-i\omega_k(t - t') + ik(x - x')]. \quad (55)$$

Это хорошо известное соотношение позволяет вычислить корреляционную функцию по заданной спектральной плотности.

Заметим, что средний квадрат модуля волновой функции в данной точке  $x$  равен просто

$$|\psi|^2 = \sum_k a_k^2. \quad (56)$$

Временная зависимость корреляционной функции от  $t - t'$  согласно (55) определяется как спектральным составом волн, так и законом дисперсии  $\omega = \omega_k$ .

## МИКРОМИР И МАКРОМИР

Обсуждение процессов микромира начинается с уравнения Шрёдингера — основного уравнения квантовой теории. Это уравнение описывает временную эволюцию волновой функции  $\psi$ . По внешнему виду оно не сильно отличается от уравнения для классического поля (например, от уравнения Леонтовича). Но на самом деле  $\psi$ -функция имеет совершенно другой физический смысл. Как известно, она позволяет найти значение любой физической величины  $L$  согласно рецепту:  $L = \langle \psi | \hat{L} | \psi \rangle$ , где  $\hat{L}$  — соответствующий оператор, а угловые скобки использованы в соответствии с обозначениями Дирака. Отсюда видно, что  $\psi$ -функция имеет информационный смысл. Более загадочным является то обстоятельство, что результаты измерения физической величины  $\hat{L}$  в общем случае дают случайные результаты, которые только в среднем сходятся к  $L$ . Квантовая теория предсказывает только вероятности получения того или иного результата при измерении.

Здесь мы встречаемся с центральной проблемой квантовой теории: каким образом квантовая потенциальность, описываемая волновой функцией, превращается в классическую реальность при измерении или любом другом квантовом событии (квантовом скачке). Этот вопрос с разных точек зрения обсуждается на протяжении всего текста книги. А в данной главе он обыгрывается с точки зрения "квантовой логики" Ю. Орлова. А именно, в разделе 12 приводится аргументация в пользу того, что обратимые колебания перед принятием окончательного решения являются достаточно характерной чертой в мыслительной деятельности человека. Можно сказать, что у человека сначала появляются намерения, которые могут превратиться в действие только после принятия решения. На простом примере одномерного движения квантовой частицы проиллюстрирована возможность появления и эволюции во времени намерений микрочастицы. Такая эволюция естественно сводится к уравнению Шрёдингера.

Далее в главе рассматривается поведение квантовой частицы в термостате и обсуждается дуализм волна-частица. Шаг за шагом читатель подводится к осознанию необходимости описания коллапсов волновых функций, происходящих в квантовых системах, которые не

могут считаться замкнутыми. В последующем изложении слабо открытые квантовые системы получают название информационно открытых. Именно информационная открытость и является главной причиной коллапсирования волновых функций. Но в сложных квантовых системах информационная открытость может быть лишь слабой затравкой для реально происходящих коллапсов волновых функций в виде квантового хаоса.

## 11. Уравнение Шрёдингера

Квантовая механика показала, что все микрочастицы обладают волновыми свойствами. А именно, каждой свободной частице соответствует волна с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , так что энергия этой частицы равна  $\hbar\omega$ , а импульс  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка. Для свободной частицы с массой  $m$  энергия равна  $p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$ . Другими словами,  $\varepsilon = \hbar\omega_k = \hbar^2 k^2/2m$ . Соответственно, уравнение (51) для свободной частицы принимает вид уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi. \quad (57)$$

Заметим, что подобно уравнению Леонтовича (53) уравнение Шрёдингера инвариантно по отношению к замене  $\psi$  на  $\psi \exp(i\alpha)$ , где  $\alpha = \text{const}$  — постоянный сдвиг фазы. Если частица не является свободной, а движется в потенциале  $U(\mathbf{r})$ , то суммарная энергия  $\varepsilon$  равна сумме кинетической и потенциальной энергий,  $\varepsilon = (p^2/2m) + U$ , и соответственно, уравнение Шрёдингера записывается в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(\mathbf{r})\psi \equiv H\psi, \quad (58)$$

где  $H$  — оператор Гамильтона.

Уравнение (57) по аналогии с (51) можно было бы считать относящимся к классическому волновому полю. Тогда  $|\psi|^2$  можно было бы интерпретировать как плотность одинаковых бозе-частиц в данной точке пространства. Перенесение уравнения Шрёдингера на одну частицу потребовало интерпретации  $|\psi|^2$  как плотности вероятности, и мы подробно обсудим этот подход в последующем изложении.

А пока рассмотрим уравнение свободного движения (57) для одной частицы в случае только одного измерения, когда  $\psi = \psi(x, t)$ .

Уравнение (57) похоже на уравнение диффузии, но только с дополнительной мнимой единицей в левой части уравнения. Поэтому и подход к его решению может быть сходен с решением параболиче-

ского уравнения диффузии. Допустим, например, что при  $t = 0$  волновая функция имеет вид

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi b^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right). \quad (59)$$

Эта функция нормирована на единицу, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^2 dx = 1.$$

Она описывает волновой пакет, локализованный на интервале  $\Delta x$  масштаба  $b$ . Прямой подстановкой можно проверить, что в последующие моменты времени решение уравнения Шрёдингера имеет вид

$$\psi(x, t) = \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \quad (60)$$

где  $a^2 = b^2 - i(\hbar t/m)$ . С помощью этой функции нетрудно вычислить среднеквадратичное значение  $\langle x^2 \rangle$ . Оно оказывается равным

$$\langle x^2 \rangle = b^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b^2}. \quad (61)$$

Это выражение в точности соответствует известному соотношению неопределенностей

$$\Delta x \Delta p > \hbar.$$

А именно, если начальная локализация  $\Delta x$  составляет величину  $b$ , то неопределенность скорости  $\Delta v \sim \hbar/mb$  приводит к расширению волнового пакета со скоростью  $\Delta v$ , и при больших значениях времени локализация  $\Delta x$  возрастет как  $\Delta x \sim t(\hbar/mb)$ .

Локализованное возмущение (59) можно было бы удержать с помощью гармонического потенциала  $U = (1/2)\alpha x^2$ . Нетрудно проверить, что при этом константа "упругости"  $\alpha = \hbar^2/mb^4$ , а энергия осциллятора  $\varepsilon = \hbar\omega_0/2 = (1/2)\hbar(\alpha/m)^{1/2}$ . При  $b \rightarrow \infty$  константа  $\alpha \rightarrow 0$ .

## 12. Намерения

Ю. Орлов [10] обратил внимание на то, что во многих наших поступках и, в особенности, в мотивации этих поступков нередко проявляется некоторое сходство с квантовой механикой. Для описания таких особенностей наших действий или рассуждений он предложил даже



использовать новый термин "волновая логика". Во введении такой терминологии, скорее всего, нет большой необходимости, но все же, двигаясь по намеченному им пути, можно по-новому взглянуть как на некоторые особенности нашего мышления, так и на парадоксальную структуру квантовой механики.

Представим себе, что нам нужно принять некоторое решение, которое соответствует только двум возможным ответам: да или нет. Это может любое решение в диапазоне от самого ответственного до самого простого, например, встать со стула или сидеть на нем в течение некоторого промежутка времени. Варианты соответствующих ответов можно обозначить символами  $+1$  и  $-1$ . Интуитивно мы можем ощущать нашу склонность к тому или иному ответу, и поэтому должна существовать некоторая числовая характеристика нашего предпочтения. Наши колебания в ту или иную сторону являются полностью обратимыми до тех пор, пока мы не приняли окончательного решения. Нашу склонность к тому или иному решению можно характеризовать некоторым параметром  $a$ , который имеет возможность изменяться в каком-то смысле, приближаясь то к  $+1$ , то к  $-1$ . А сам акт решения должен давать либо  $+1$ , либо  $-1$  без всяких промежуточных возможностей.

Чтобы понять, как может выглядеть параметр  $a$ , можно провести следующий мысленный эксперимент. Допустим, что на заданный вопрос должны ответить  $N$  человек, и все они на данный момент находятся в одном и том же состоянии нерешительности. Потребовав немедленного ответа, мы получим  $N_+$  ответов с  $+1$  и  $N_-$  ответов с  $-1$ . Таким образом, можно ввести вероятности  $p_+ = N_+/N$ ,  $p_- = N_-/N$  положительного и отрицательного ответов. Сумма  $p_+ + p_- = 1$ , поэтому можно ввести параметр  $\alpha$  такой, что  $p_+ = \cos^2 \alpha$ ;  $p_- = \sin^2 \alpha$ . Отсюда видно, что величину  $a$  целесообразно представлять себе в виде единичного вектора в двумерном пространстве  $\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}$ , где  $a_x = \cos \alpha$ ;  $a_y = \sin \alpha$ . Квадраты проекций вектора  $\mathbf{a}$  на оси  $x, y$  равны соответствующим вероятностям:  $a_x^2 = p_+$ ,  $a_y^2 = p_-$ .

Теперь видно, что наши колебания с принятием того или иного решения связаны с поворотами единичного вектора в двумерном пространстве. Эти колебания можно считать полностью обратимыми: мы можем склоняться то к одному, то к другому ответу. Но если ответ дан, то тем самым дан старт развитию необратимых процессов, так что и сам ответ принадлежит к цепочке необратимых событий.

Введем в рассмотрение матрицу

$$\hat{\sigma} = \begin{vmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что ответ "да" или "нет" соответствует собственному вектору, удовлетворяющему соотношению  $\hat{\sigma} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$ , где  $\lambda = \pm 1$ . Другими словами, принятие решения соответствует "коллапсу" вектора  $\mathbf{a}$  либо в вектор  $\{1, 0\}$ , либо в вектор  $\{0, 1\}$ . Сам вектор  $\mathbf{a}$  условимся называть "намерением", которое превращается в "решение" только в результате действия проекционного оператора  $P$ , который проецирует вектор  $\mathbf{a}$  в состояние  $\{1, 0\}$  с вероятностью  $a_x^2$  либо в ортогональное ему состояние  $\{0, 1\}$  с вероятностью  $a_y^2$ . Соответственно,  $a_x = P_x \mathbf{a}$ ,  $a_y = P_y \mathbf{a}$ . Вместо двумерного вектора  $\{a_x, a_y\}$  можно использовать комплексное число  $a = a_x + ia_y$ . Поскольку  $|a|^2 = 1$ , число  $a$  можно представить в виде  $a = \exp(i\alpha)$ . Нетрудно видеть, что  $\hat{\sigma} a$  равно  $a^*$ , т.е. комплексно сопряженному числу. Собственным значениям  $a$  соответствуют величины 1 или  $-1$ , а нашим колебаниям в принятии решения соответствуют просто операции вида  $\exp(i\varphi)a$ , где  $\varphi$  — "угол поворота" либо к ответу  $+1$ , либо к ответу  $-1$ .

Итак, мы приходим к комплексному представлению "намерения" в простейшем случае ответов "да" или "нет". Совокупность этих ответов естественно назвать "пространством намерений". Рассмотрим теперь более сложные пространства намерений, в частности, пространства с большим числом измерений.

Допустим, например, что речь идет об избирательной кампании по выборам на высший пост страны. Пусть имеется  $n$  кандидатов, по каждому из которых избиратель должен ответить в двоичной системе: "за" или "против". Ответу "за" мы опять припишем число 1, ответу "против" — число  $-1$ . Таким образом, намерению избирателя по каждому кандидату с номером  $j$  естественно приписать комплексное число  $a_j$ , которое при голосовании может быть равным 1 (т.е. "да") или  $i$  (т.е. "нет"). Другими словами, результат голосования соответствует собственному значению соотношения  $a_j^* = \lambda_j a_j$ . Здесь собственное значение  $\lambda_j$  может быть равно либо 1, либо  $-1$ .

Совокупность  $n$  комплексных чисел  $a_j$  образует вектор  $\mathbf{a} = \{a_1 \dots a_n\}$  в комплексном  $n$ -мерном пространстве, удовлетворяющий условию нормировки  $\sum_j |a_j|^2 = 1$ . Вектор  $\mathbf{a}$  можно относить либо к отдельному избирателю, либо ко многим и даже всем избирателям. До проведения выборов вектор  $\mathbf{a}$  можно рассматривать как характеристику общественного мнения. Например, с помощью анонимного опроса можно попытаться оценить долю голосов, которую избиратели готовы отдать тому или иному кандидату. Таким образом можно получить представление о распределении величин  $|a_j|^2$ , если  $|a_j|^2$  интерпретировать как долю голосов, предположительно отдаваемых за кандидата с номером  $j$ . А можно провести опрос по избранному

кандидату, и тогда мы сможем оценить фазу  $\alpha_j$  по кандидату с номером  $j$ , где фаза  $\alpha_j$  определена соотношением  $a_j = \exp(i\alpha_j)$  в предположении, что мы рассматриваем только данного кандидата, т.е. считаем  $|a_j| = 1$ .

До голосования вектор  $\mathbf{a}$  может испытывать обратимые изменения в зависимости от того, как меняется общественное мнение. Задача избирательной кампании по каждому кандидату состоит в увеличении соответствующей компоненты  $|a_j|$  вектора  $\mathbf{a}$ . А в момент выборов каждый избирательный бюллетень должен приобрести вид  $\{0 \dots 1 \dots 0\}$ , т.е. вид вектора только с одной отличной от нуля компонентой. Можно сказать, что голосование каждого избирателя осуществляет проекцию (коллапс) вектора  $\mathbf{a}$  на одну из осей " $j$ ". Величина  $|a_j|$  при этом становится равной единице, а комплексное число  $a_j$  поворачивается к действительной оси. Результат такого преобразования можно описать некоторым проекционным оператором  $P_j$ . Как мы видим, главным действием такого оператора является выбор ячейки с номером  $j$ , а "поворот" к ответу "да" является как бы само собой разумеющимся. Поэтому результат голосования (хочется сказать "измерения") по многим избирателям характеризуется просто распределением вероятностей  $p_j = |a_j|^2$ . Это значит, что главной характеристикой процесса превращения "намерения" в "решение" являются модули компонент  $|a_j|^2$ . А возможные состояния вектора  $\mathbf{a}$  до принятия решения можно описать суперпозициями вида  $A\mathbf{a} + B\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  возможные намерения. Это значит, что мы имеем дело с линейным векторным пространством. Поскольку векторы вида  $\mathbf{a}$  должны удовлетворять условию нормировки

$$|\mathbf{a}|^2 = \sum_j |a_j|^2 = 1,$$

то речь идет о комплексном метрическом пространстве, в котором определена операция скалярного произведения векторов. Таким образом, колебаниям общественного мнения перед голосованием соответствуют возможные повороты единичного вектора  $\mathbf{a}$  в  $n$ -мерном пространстве. Эти повороты можно представлять себе как результат соответствующих унитарных преобразований:  $\mathbf{a}' = \hat{U}\mathbf{a}$ , где  $\hat{U}$  — унитарная матрица. В компонентах это соотношение выглядит как

$$a'_k = \sum_j U_{kj} a_j.$$

Если после некоторого изменения общественного мнения  $\hat{U}$  произошло его новое изменение  $\hat{V}$ , то в результате получим вектор  $\mathbf{a}'' = \hat{V}\hat{U}\mathbf{a}$ , т.е. появляется операция умножения операторов. Произведение  $\hat{V}\hat{U}$  в общем случае не коммутативно, но переход  $\hat{U}\hat{V}$  также является вполне допустимым. Естественно, что каждому переходу  $U$  можно сопоставить обратный переход  $U^{-1}$ .

Таким образом, эволюция вектора  $\mathbf{a}$  до принятия решения может быть вполне обратимой: после каждого перехода  $U$  обратным переходом  $U^{-1}$  можно вернуться в прежнее состояние. А коллапс, т.е. акт принятия решения, является существенно необратимым: построить оператор, обратный проекционному оператору  $P_j$ , в случае  $n > 2$  измерений просто невозможно.

Допустим теперь, что общая схема поведения сложных систем является достаточно универсальной и состоящей из цепочки изменения намерений и принятия решений. Кажется естественным допустить, что точно такая же схема может реализоваться в сложных физических системах. Здесь мы немедленно сталкиваемся с вопросом о том, существуют ли вообще простые системы и не является ли природа сложной во всех своих проявлениях. Более приемлемой кажется именно вторая возможность. Поэтому не кажется невероятным, что даже одна изолированная, т.е. свободная микрочастица, может иметь изменяющиеся во времени намерения, которые должны превращаться в "решения" только при соприкосновении частицы с внешним миром.

Рассмотрим свободную микрочастицу с массой  $m$  (например, электрон), которая может испытывать свободное движение вдоль оси  $x$ . Намерения такой частицы можно описывать комплексной функцией  $\psi(x)$ , имеющей следующий физический смысл: вероятность нахождения частицы в интервале  $(x, x + \Delta x)$  равна  $|\psi(x)|^2 \Delta x$ . Разумеется, такое определение предполагает, что у частицы имеется возможность дать ответ о своем местонахождении прибору, который измеряет координату  $x$ . Только в этих условиях намерение  $\psi(x)$  может коллапсировать в интервал  $(x, x + \Delta x)$  с вероятностью  $|\psi(x)|^2 \Delta x$ . Если частице и ее намерению задаются другие вопросы с помощью других приборов, то ответ может быть другим, и коллапс  $\psi(x)$  в конечное состояние будет отличен от попадания в интервал  $(x, x + \Delta x)$ .

Коллапс намерения  $\psi(x)$  при измерении является заведомо необратимым процессом: восстановить исходную функцию  $\psi(x)$  по сколлапсированной локализованной функции не представляется возможным. Но до коллапса, т.е. до соприкосновения с измерительным прибором, функция  $\psi(x)$  может обратимо эволюционировать во времени, так что  $\psi = \psi(x, t)$ . Попытаемся найти эту эволюцию, исходя из некоторых достаточно общих предпосылок.

Ясно, что эволюция  $\psi(x, t)$  должна происходить непрерывно в силу того, что время непрерывно и любой момент времени не имеет никаких отличительных признаков.

Наряду с  $\psi(x, t)$  рассмотрим функцию  $\psi(x, t + \Delta t)$  в несколько более поздний момент времени  $t + \Delta t$ . Поскольку при такой эволюции должно выполняться условие нормировки  $\int |\psi|^2 dx = 1$ , функция  $\psi(x, t + \Delta t)$  должна получаться из  $\psi(x, t)$  некоторым унитарным преобразованием:

$$\psi(x, t + \Delta t) = \int V(x - x', \Delta t) \psi(x', t) dx'.$$

Функция  $V(x - x', \Delta t)$  должна быть симметричной относительно  $x - x'$ , а при  $\Delta t \rightarrow 0$  она должна стремиться к  $\delta(x - x')$ . Будем считать, что интервал  $\Delta t$  очень мал. Тогда  $\psi(x', t)$  можно разложить по разности  $(x - x')$ , ограничиваясь малыми членами до второго порядка включительно:

$$\psi(x, t + \Delta t) = \psi(x, t) + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dots, \quad (62)$$

где

$$b = \int (x - x')^2 V(x - x', \Delta t) dx'.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  величина  $b \rightarrow 0$ . Будем считать, что величина  $b$  пропорциональна  $\Delta t$ , тогда в соотношении (62) можно перейти к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ . Интеграл  $\int \psi^*(x) \psi(x) dx$  должен сохраняться, поэтому параметр  $b$  должен быть чисто мнимым. Поскольку масштаб измерения длины и времени произволен, мы можем выбрать такую систему единиц, чтобы параметр  $b$  равнялся просто мнимой единице. В этой системе мы получаем уравнение

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

которое в точности совпадает с уравнением Шрёдингера для одномерного движения свободной частицы, если использовать систему атомных единиц измерения:  $\hbar = 1$ ,  $m = 1$ . А если ядро  $V(x - x', \Delta t)$  не симметрично относительно разности  $(x - x')$ , так что при  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\int (x - x') V(x - x', \Delta t) dx' \rightarrow -iU(x)\Delta t,$$

то получается уравнение Шрёдингера для частицы в потенциале  $U(x)$ .

Таким образом, уравнение Шрёдингера можно рассматривать как уравнение для эволюции намерений квантовой частицы, а выражение  $V(x - x', \Delta t)$  можно считать амплитудой намерения перехода частицы из точки  $x'$  в точку  $x$  за время  $\Delta t$ . С помощью этой амплитуды легко может быть построен интеграл по траекториям согласно формализму Фейнмана [7]. Чтобы не усложнять формул, рассмотрим опять случай свободного одномерного движения. Нетрудно видеть, что при малых  $\Delta t$  амплитуда перехода  $V(x - x', \Delta t)$  может быть представлена в виде

$$V(x - x', \Delta t) = (2\pi i \Delta t)^{-1/2} \exp \frac{i(x - x')^2}{2\Delta t}.$$

В самом деле, интеграл  $\int V(x - x', \Delta t) dx' = 1$ , а среднее значение  $\int (x - x')^2 V(x - x', \Delta t) dx' = i$ , как и должно быть. Но величину  $(x - x')^2/2\Delta t$  можно считать равной  $S\Delta t$ , где  $S = L\Delta t$  представляет собой действие на интервале  $\Delta t$ , а  $L$  представляет собой лагранжиан  $L = \dot{x}^2/2 = (x - x')^2/2(\Delta t)^2$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . С помощью элементарной амплитуды перехода  $V(x - x', \Delta t)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  можно построить амплитуду перехода на любом конечном интервале времени  $t$ :

$$V(x - x', t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iint \dots \int \exp \left[ \frac{i}{2\Delta t} \sum_{j=1}^N (x_j - x_{j-1})^2 \right] \times \\ \times dx_1 \dots dx_{N-1} (2\pi i \Delta t)^{-N/2},$$

где  $N = t/\Delta t$  — число малых интервалов  $\Delta t$  на промежутке времени  $t$ . Выражение, стоящее под знаком экспоненты, представляет собой  $iS_{cl}(x - x', t)$ , где  $S_{cl}$  есть классическое действие между точками  $x, x'$  за время  $t$ . В случае свободного движения  $V(x - x', t)$  имеет ту же самую структуру, что и  $V(x - x', \Delta t)$ : достаточно лишь  $\Delta t$  заменить на  $t$ . Но если речь идет о движении частиц в поле сил, то связь между амплитудой перехода за время  $t$  и элементарной амплитудой перехода за интервал  $\Delta t \rightarrow 0$  ставится сложнее.

Итак, формализм Фейнмана естественно укладывается в представления об эволюции намерений квантовой частицы.

### 13. Частица в термостате

Рассмотрим квантовую частицу с одной степенью свободы в термостате, который представляет собой ящик длиной  $L$  вдоль оси  $x$ . Движением частицы вдоль осей  $y$  и  $z$  мы пока не интересуемся. Предполагая, что стенки ящика зеркально отражают частицу, мы

должны выбрать для частицы следующие собственные функции:

$$\psi_n = \exp(-i\omega_n t) \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin \frac{\pi n x}{L}. \quad (63)$$

Здесь  $\omega_n = \varepsilon_n/\hbar$  — собственная частота,  $\varepsilon_n = p_n^2/2m = (\pi n \hbar/L)^2/2m$  — собственная энергия,  $n = 1, 2, 3, \dots$  — любое натуральное число. Нормировку у функций  $\psi_n$  мы выбрали таким образом, что  $L\langle|\psi^2|\rangle = 1$ .

Если стенки ящика находятся при температуре  $T = \text{const}$ , то частица должна прийти в термодинамическое равновесие со стенками при той же самой температуре. Это означает, что в соответствии с формулой Больцмана, или, что то же самое, с каноническим распределением статистической механики, вероятность  $p_n$  нахождения частицы в состоянии " $n$ " равна

$$p_n = Z^{-1} \exp(-\beta\varepsilon_n). \quad (64)$$

Здесь  $Z$  — нормировочный множитель,  $\beta = 1/T$ . Так как  $\sum_n p_n = 1$ , то

$$Z = \sum_n \exp(-\beta\varepsilon_n), \quad (65)$$

и по этой причине функцию  $Z$  называют статистической суммой.

Иногда вместо  $Z$  вводят в рассмотрение свободную энергию  $F = -T \ln Z$ , и тогда выражение (64) записывается в виде

$$p_n = \exp(-\beta\varepsilon_n + \beta F). \quad (66)$$

С помощью этого соотношения нетрудно найти среднюю энергию частицы

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle = \sum_n p_n \varepsilon_n$$

и другие термодинамические величины. Чтобы упростить соответствующие соотношения, мы предположим, что размеры системы очень велики, так что нижний уровень имеет энергию  $\varepsilon_1 \ll T$ . Тогда вместо суммирования по  $n$  в (65) можно произвести интегрирование, считая  $n$  непрерывной переменной. Интегрировать по  $n$  удобно от  $-\infty$  до  $+\infty$ , но тогда из интеграла нужно вычесть единицу, равную  $\exp(-\beta\varepsilon_n)$  при  $\varepsilon_n = 0$ . Разделив результат на 2, получим приближенное выражение для  $Z$ :

$$Z = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{L}{b_0} - \frac{1}{2}, \quad b_0 = \frac{\hbar}{(mT)^{1/2}}. \quad (67)$$

Соответственно, можно найти выражения для других физических величин. В частности, для средней энергии находим выражение

$$\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} T \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{b_0}{L} \right). \quad (68)$$

Первый закон термодинамики для одномерной частицы можно записать в виде

$$d\varepsilon = -p dL + T ds. \quad (69)$$

Здесь  $\varepsilon$ ,  $p$ ,  $s$  — энергия, давление и энтропия, отнесенные к одной частице,  $L$  — длина сосуда. Допустим, например, что стенки теплонепроницаемы, так что  $ds = 0$ , и процесс является адиабатическим. При этом все вероятности  $p_n$  должны сохранять свои прежние значения, что возможно лишь при

$$TL^2 = \text{const}. \quad (70)$$

Это и есть закон адиабаты для одномерного случая. Если в соотношении (68) пренебречь малым вторым слагаемым и принять  $\varepsilon = T/2$ ,  $p = T/L$ , где величина  $1/L$  играет роль "плотности частиц", то согласно (69) закон сохранения энергии при  $ds = 0$  и связи (70) удовлетворяется. Что касается энтропии, то ее лучше определить в соответствии со статистической механикой

$$s = - \sum_n p_n \ln p_n = \beta(\varepsilon - F). \quad (71)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (66). В другой записи соотношение (71) выглядит как

$$F = \varepsilon - Ts. \quad (72)$$

Для свободной частицы в очень большом ящике находим

$$s = \ln \frac{L}{b_0} + s_0, \quad b_0 = \frac{\hbar}{(mT)^{1/2}}, \quad (73)$$

где  $s_0 = (1/2) \ln(2/\pi)$  — малое число, которым можно пренебречь по сравнению с  $\ln(L/b_0)$ . Полученные выше соотношения  $\varepsilon = T/2$ ,  $p = T/L$  справедливы только при  $L \gg b_0$ . Если уменьшать длину  $L$ , то в выражении (68) для  $\varepsilon$  следует учесть второе слагаемое, что приводит к аналогичной добавке в выражении для давления:  $p = 2\varepsilon = T/L + (\pi/2)^{1/2} T b_0 / L^2$ . (Давление получается дифференцированием (68) по  $L$  вдоль адиабаты (70).) Легко видеть, что при приближении  $L \rightarrow b_0$  нижний энергетический уровень  $\varepsilon_1$  становится сравнимым с  $T$ .



Соответственно, при малых  $L$  частица "сядет" на самый нижний энергетический уровень, и ее энергия при уменьшении  $L$  будет возрастать как  $L^{-2}$ . Энтропия  $s$  будет равна нулю, а давление  $p$  будет изменяться как  $L^{-3}$ . Мы как бы доходим до "размера" частицы  $b_0$ , и для дальнейшей деформации частицы требуется большая затрата энергии.

Итак, грубо можно сказать, что  $b_0$  — это характерный "размер" частицы при температуре  $T$ , и тогда отношение  $L/b_0$  означает число ячеек, по которым можно размещать частицу с температурой  $T$ .

С помощью распределения вероятностей  $p_n$  можно найти еще одну величину, которая в квантовой механике получила название матрицы плотности  $\rho(x, x')$ . Матрица плотности похожа на корреляционную функцию для случайного набора классических волн. Она определяется следующим выражением:

$$\rho(x, x') = \langle \psi(x)\psi^*(x') \rangle = \sum_n p_n \psi_n(x)\psi_n^*(x'). \quad (74)$$

При  $L \gg b_0$  функция  $\rho(x, x')$  зависит только от разности  $x - x'$ . Поэтому при вычислении (74) можно произвести усреднение по  $x$  при заданной разности  $x - x'$ . Поскольку согласно соотношениям (66), (72), (73) вероятность

$$p_n = \left( \frac{\pi b^2}{2L^2} \right)^{1/2} \exp(-\beta \epsilon_n),$$

вычисление  $\rho$  может быть проведено достаточно быстро. При этом опять суммирование по  $n$  может быть заменено на интегрирование, и для  $\rho(x, x')$  получаем

$$\rho(x, x') = \frac{1}{L} \exp \left[ -\frac{(x - x')^2}{2b_0^2} \right], \quad (75)$$

где  $b_0^2 = \hbar^2/mT$ .

Заметим, что это выражение может быть представлено в виде

$$\rho(x, x') = \frac{\sqrt{2\pi}b_0}{L} \rho_0(x, x'),$$

где

$$\rho_0(x, x') = \left( \frac{1}{2\pi b_0^2} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{(x - x')^2}{2b_0^2} \right]. \quad (76)$$

Функция  $\rho_0(x, x')$  нормирована на единицу, т.е. интеграл от  $\rho_0$  по  $x'$  равен единице. Функция  $\rho_0(x, x')$  — это как бы распределение плотности по  $x'$  при фиксированном значении точки  $x$ , которая в свою очередь с вероятностью  $\sqrt{2\pi} b_0/L$  может быть расположена в одной из ячеек.

#### 14. Дуализм волна – частица

Любой учебник по квантовой механике начинается с описания дуализма волна – частица: волновые свойства частицы описываются уравнением Шрёдингера, а корпускулярные свойства проявляются при измерениях. Например, если картину волновой интерференции электронов регистрировать с помощью фотопластинки, то потребуется накопить очень много пятнышек на пластинке, чтобы эта картина проявилась достаточно четко. Только с помощью очень многих событий можно подтвердить знаменитое соотношение  $p = |\psi|^2$ , связывающее между собой вероятность  $p$  и квадрат модуля волновой функции  $\psi$ . Как это происходит практически, очень хорошо иллюстрируется рис. 3 в обзоре Намики и Паскацио [22], изображающим результат регистрации пучка электронов на фотопластинке. Появление каждого пятнышка на фотопластинке отвечает "коллапсу" волновой функции регистрируемого электрона: волновая функция данного электрона мгновенно уничтожается за пределами пятнышка. Сначала пятнышки появляются нерегулярно, и только после накопления большого числа пятнышек начинает прорисовываться дифракционная картина. За этой картиной стоит неизменная волновая функция падающего на пластину пучка электронов.

Роль конкретного механизма регистрации не столь уж велика: в точности такой же коллапс происходит при пролете электрона через камеру Вильсона с регистрацией соответствующего трека частицы. Более того, даже факт регистрации частицы не столь уж существен: важно лишь, чтобы частица оставила о себе "память" в макроскопической среде "детектора".

Дуализм волна – частица универсален и относится к любой микро-частице. Поэтому можно представить себе ситуацию, когда интерференционная картина создается волновой функцией одиночного атома или молекулы. Если такая частица проникает в макротело, например в газ при комнатной температуре, то первый же акт взаимодействия частицы с газом приведет к коллапсу ее волновой функции. А затем частица в газе будет испытывать броуновское движение: она придет в тепловое равновесие с газом и будет медленно диффундировать в

пространстве. Эту диффузию можно описывать при помощи матрицы плотности.

Существует определенное сходство в формальных выражениях для матрицы плотности в квантовой механике и для корреляционной функции случайного классического волнового поля. Однако, по существу, эти физические объекты разительно отличаются друг от друга. Дело в том, что волновая функция квантовой механики в простейшем случае относится только к одной частице. Грубо говоря, она реальна только там, где эта частица существует, и имеет мало смысла для тех областей, где частицы нет. Можно сказать и по-другому. В квантовой механике все физические величины получаются в результате действия некоторых операторов на волновую функцию. Соответственно, средние значения этих величин можно получить путем их усреднения с весом  $|\psi|^2$ . Отсюда видно, что абсолютная фаза и абсолютная амплитуда волновой функции не имеют физического смысла и могут быть выбраны для удобства расчетов по своему усмотрению. Поэтому сильные относительные изменения амплитуды в далеких по расстоянию точках не приводят к заметному изменению локальных физических величин, если градиент  $\psi$  при этом изменяется ничтожно мало. По этой причине  $|\psi|^2$ -функция приобретает смысл распределения вероятностей, а не распределения реальной плотности или волнового движения, как в случае классических полей.

Рассмотрим с этой точки зрения частицу в термостате. Как мы видели выше, энергия свободной частицы в таком термостате не зависит от длины  $L$ , если только  $L \gg b_0$ .

Повторим теперь с квантовой частицей тот же мысленный эксперимент, который был проведен с классической частицей. А именно, перегородим наш термостат непроницаемой перегородкой, разделив его на две части. При этом возмущение системы будет мало, и частица по-прежнему будет иметь энергию  $T/2$ , если только  $L \gg b_0$ . Частица при этом окажется только в одной из половин, но пока еще для внешнего мира это ничего не означает: при многократном повторении эксперимента все будет выглядеть так, как если бы  $|\psi|^2$  равнялось  $1/L$  и в той, и в другой половинах.

Но допустим, что у нас есть способ "узнать", в какой из половин находится частица. В квантовой механике такое обнаружение частицы в одном из состояний называется "измерением". Как только это измерение сделано,  $|\psi|^2$  в пустой половине исчезает, а в половине с частицей удваивается. Происходит коллапс волновой функции. При этом энтропия частицы уменьшается на  $\ln 2$ , т.е. на один бит.

Если бы во внешнем мире при этом ничего не изменилось, то можно было бы приступить к сооружению вечного двигателя второго рода. А

поскольку это невозможно, то во внешнем мире рассматриваемое нами измерение должно сопровождаться необратимым возрастанием энтропии на величину не менее одного бита. Можно сказать, что коллапс волновой функции — это реальный физический акт, но он производится не столько какими-либо приборами, сколько необратимым процессом внешнего мира.

Можно было бы попытаться "поймать" частицу в меньший интервал  $L_0 \ll L$ . Если опять  $L_0 \gg b_0$ , то перегородка не меняет энергии частицы, а ее энтропия уменьшается до  $\ln(L_0/b_0)$ , т.е. на величину  $\ln(L/L_0)$ . Не менее чем на эту величину, должна возрасти энтропия внешнего мира. Как мы видим, такой коллапс может происходить довольно непринужденно, если только  $L_0 > b_0$ . Можно сказать, что величина  $b_0$  характеризует эффективный "размер" частицы, и на расстояниях, значительно больших  $b_0$ , квантовая частица мало, чем отличается от классической. Другими словами, несмотря на волновые свойства, квантовая частица в сосуде большого размера может вести себя подобно классической частице.

Обсудим теперь этот же вопрос с несколько иной точки зрения. Волновая функция (63) может быть представлена в виде суммы

$$a \left[ \exp(-i\omega_n t + ik_n x) - \exp(-i\omega_n - ik_n x) \right],$$

где  $a$  — некоторая амплитуда, а  $k_n = \pi n/L$  — волновое число. Как мы видим, это суперпозиция двух волн, одна из которых бежит направо, а другая — налево. Волновое число  $k_n$  пропорционально импульсу частицы  $p_n = \hbar k_n$ . Значит,  $\psi_n$  описывает частицу, которая бегает между зеркальными стенками и обладает постоянным импульсом  $p_n$ . Такое движение при неподвижных стенках могло бы продолжаться вечно. Состояние такого типа в квантовой механике называется чистым.

Но при наличии теплообмена со стенками чистое состояние сохраниться не может: согласно (64) каждому такому состоянию отвечает лишь некоторая вероятность  $p_n$ . Если бы у нас имелась не одна частица, а очень много тождественных бозе-частиц, скажем,  $N \gg 1$ , то в каждом состоянии мы могли бы иметь много частиц. В этом случае вероятность  $p_n$ , умноженная на полное число частиц  $N$ , соответствовала бы просто распределению Максвелла, а матрицу плотности  $\rho(x, x')$ , умноженную на полное число частиц, можно было бы рассматривать как классическую корреляционную функцию случайного волнового поля  $N^{1/2}\psi(x, t)$ . При этом мы могли бы исходить из естественного предположения, что фазы собственных волн  $\psi_n$

взаимно случайны, так что усреднение по ним и приводит к усредненной корреляционной функции.

Если мы переходим к одной частице, то картина становится чисто вероятностной. В каждый момент времени частица может находиться только в одном из взаимно некогерентных состояний: одна частица не может иметь сразу много импульсов, если речь идет о ее тепловом движении. Если внезапно открыть одну из крышек и позволить частице убежать далеко от сосуда, то частицу можно обнаружить только с одним из возможных значений импульса. Точно так же нельзя иметь два значения импульса и у классической частицы. Таким образом,  $p_n$  представляет собой только вероятность нахождения частицы в состоянии "n". Разрушение взаимной когерентности  $\psi_n$ -функций вследствие теплообмена со стенкой оставляет только одну возможность: частица остается в одном из взаимно некогерентных состояний. Происходит как бы скрытый "коллапс" волновой функции, но пока это еще не реальное измерение: внешний мир может еще не иметь информации о том, на каком уровне находится частица.

Если производить очень медленные действия с частицей, например перемещать торцевую перегородку или вводить новые перегородки, то частица может успевать переходить с уровня на уровень и в среднем принимать максвелловское распределение. С точки зрения внешнего мира такая частица ведет себя как малая термодинамически равновесная система. Можно и в этом случае иметь дело с матрицей плотности  $\rho(x, x')$ , но соответствующие ей изменения или действия нужно усреднять по промежуткам времени, значительно бóльшим, чем время установления термодинамического равновесия.

Если же попытаться достаточно быстро локализовать частицу в пространстве или установить величину ее импульса, то при этом автоматически произойдет коллапс вероятностей, сопровождаемый коллапсом волновой функции. Именно этот акт не может быть произведен без возрастания энтропии во внешнем мире. Другими словами, акт коллапса — это миниатюрный необратимый процесс, что-то вроде микроскопического рождения или смерти.

Рассмотренный нами пример показывает, что реальный акт измерения в квантовой механике можно представлять себе как бы составленным из двух действий: подготовка  $\psi$ -функции к разложению на взаимно некогерентные компоненты и затем коллапс в одну из этих компонент. Разрушение когерентности, сопровождаемое внутренним коллапсом, может происходить просто за счет внешних шумов или теплового движения, а для осуществления коллапса при измерении необходим реальный неравновесный процесс, который порождает информацию в измеряющем приборе и рождает не меньшее количе-

ство энтропии во внешнем мире. В реальных условиях обе составляющие измерения могут совмещаться или быть трудно различимыми. Они скорее важны для логической ясности, чем для практической реализации.

Продолжим обсуждение поведения частицы в сосуде длины  $L$ , но теперь предположим, что только один из торцов поддерживается при температуре  $T$ , а второй торец является очень холодным, т.е. находится при температуре практически нулевой. Тогда рассматриваемая нами частица получает возможность переносить тепловой поток  $q$ . Легко оценить максимально возможную величину  $q_{\max}$ . Она достигается, если при первом же ударе о теплую стенку частица получает тепловую энергию  $T/2$ . Перелетая к холодной стенке, частица передает ей энергию того же масштаба, а затем возвращается к теплой стенке за новой порцией тепла. Пусть  $v_T = (T/m)^{1/2}$  — средняя тепловая скорость. Время пролета до второй стенки и возвращения к первой стенке не может быть меньше  $2L/v_T$ . Таким образом, тепловой поток ограничен сверху величиной  $q_{\max} = Tv_T/4L$ . Реальный тепловой поток может быть гораздо меньше: его величина зависит от того, насколько эффективно частица успевает осуществить теплообмен со стенками при каждом ударе.

Допустим теперь, что частица была внесена в некотором локализованном состоянии (59) с начальной локализацией шириной  $b$ . Если эта частица к тому же движется со скоростью  $v_0 = p_0/m$ , то соответствующая волновая функция, как нетрудно проверить, будет просто переноситься вдоль оси  $x$  со скоростью  $v_0$ . Если  $v_0$  имеет масштаб тепловой скорости  $v_T$ , то время пролета от одной стенки до другой составляет величину  $t \sim L/v_T$ . Согласно (61) за это время частица дополнительно расплывается, но если  $b^2$  подобрана таким образом, что величина расплывания сохраняет масштаб начальной ширины, т.е.  $b^2 \sim \hbar t/m \sim \hbar L/v_T m$ , то можно приближенно считать, что волновой пакет сохраняет свою ширину. Как мы видим,  $b^2 = Lb_0$ , где величина  $b_0^2 = \hbar/mT$  определяет минимальную ширину локализации матрицы плотности. При  $L \gg b_0$  величина  $b$  значительно превышает  $b_0$ , но в то же время оказывается в  $(b_0/L)^{1/2}$  раз меньше, чем  $L$ .

Поскольку рассматриваемая нами система сильно неравновесна, то нельзя исключить ситуацию, что при каждом ударе о холодную стенку факт удара может регистрироваться, т.е. как бы "измеряться" самой стенкой.

Такой процесс означает, что фононы, порождаемые частицей, неупруго отражающейся от холодной стенки, могут производить в стенке необратимые деформации или другие возбуждения мягких

мод, которые затем "запоминаются" в том или ином виде. Необратимые процессы внутри стенки могут автоматически "измерять" частицу, т.е. производить дополнительное коллапсирование волновой функции. Величина  $(Lb_0)^{1/2}$  при этом определяет минимальный размер волнового пакета: он достигается при условии, что "измерение" происходит при каждом ударе. Как мы видим, волновой пакет при этом может стать похожим на классическую частицу. Однако ширина этого пакета  $b \geq (Lb_0)^{1/2}$  существенно превышает минимальный масштаб  $b_0 = \hbar(mT)^{1/2}$ . Согласно соотношению неопределенностей величине  $b$  соответствует неопределенность импульса  $\Delta p \sim \hbar/b$ . Можно сказать, что каждый волновой пакет уширен на несколько энергетических уровней, так что  $\Delta v/v_T \sim b_0/b$ . Если ширина локализации  $b \ll L$ , то частица может бегать как неравновесный волновой пакет и, чтобы заполнить в среднем весь дозволённый интервал скоростей  $\sim v_T$ , ей придется испытать много столкновений со стенками.

Если уменьшать величину взаимодействия со стенкой, то степень неравновесности будет уменьшаться. Соответственно, будет увеличиваться ширина пакета  $b$ . И в пределе мы опять придем к ситуации, когда волновая функция частицы расплывется на весь размер  $L$ . Если при этом взаимодействие со стенками исчезающе мало, то частица будет очень долго находиться на каждом энергетическом уровне  $\epsilon_n$ , испытывая медленное броуновское движение по уровням за счет взаимодействия с тепловыми колебаниями стенок.

Итак, приведенные рассуждения показывают, что дуализм волна – частица в квантовой механике может во многом зависеть от внешних условий, в которых находится частица.

Аппарат квантовой механики позволяет описывать широкий набор конкретных физических ситуаций. В частности, для описания теплового движения частицы в виде движущихся пакетов можно опять воспользоваться матрицей плотности. Однако эта матрица плотности может отличаться от термодинамической матрицы плотности (74), поскольку для каждого волнового пакета фазы близких гармоник оказываются коррелированными между собой, т.е. каждый такой пакет выглядит как суперпозиция  $\sum_n c_n \psi_n$ . Если мы произведем усреднение (74), то получим выражение

$$\rho(x, x') = \sum_{n,m} W_{nm} \psi_n \psi_m^*, \quad (77)$$

в котором недиагональные матричные элементы  $W_{nm}$  не обязаны обращаться в нуль. Более того, в случае  $W_{nm} = c_n c_m^*$  мы получим

просто одно единственное чистое состояние, которое отвечает выбранному нами волновому пакету.

Если опять провести аналогию с классическим полем, то можно сказать, что в случае чистого состояния фазы отдельных волн скоррелированы друг с другом, т.е. не являются полностью хаотическими. Переход к тепловому равновесию сопровождается хаотизацией фаз и разрушением когерентности. При этом частица может находиться только в одном из взаимно некогерентных состояний. Соответственно, при полной хаотизации фаз недиагональные члены в (77) исчезают, и мы приходим к обычному определению равновесной матрицы плотности с больцмановским распределением вероятностей  $W_m$  по энергиям.

## 15. "Радиоактивный распад"

С помощью нашей идеализированной модели одной частицы в одномерном термостате мы рассмотрим еще один процесс, который напоминает радиоактивный распад ядра. А именно, в термостате длиной  $L$  мы устроим миниатюрную ловушку для частицы, вводя дополнительную перегородку на расстоянии " $b$ " от одного из торцов, допустим, левого. Пусть  $b \ll b_0$ , где  $b_0 = \hbar(mT)^{1/2}$  — ширина минимальной локализации частицы с энергией  $\sim T$ . Первый нижний энергетический уровень в нашем малом отсеке,  $\varepsilon_{\min}^* = \pi^2 \hbar^2 / 2mb^2$ , значительно превышает температуру. Поэтому температура левого торца не играет никакой роли: частица все равно будет находиться на высоком уровне  $\varepsilon_{\min}^*$ , а следующий уровень настолько высок, что вероятность попадания туда частицы пренебрежимо мала.

Итак, пусть наша частица находится в чистом состоянии с энергией  $\varepsilon_{\min}^*$  в малой ловушке с размером  $b \ll L$ . Сделаем теперь в перегородке малое отверстие, чтобы волновая функция частицы смогла медленно вытекать в основную область термостата. Разумеется, вместо дырочки можно использовать энергетический барьер — аналог перегородки с возможностью вытекания волновой функции за счет так называемого туннелирования — подбарьерного "просачивания" частицы в свободную область.

Этот процесс есть точная аналогия  $\alpha$ -распада тяжелого ядра. Поскольку при  $L \gg b$  волновая функция в свободной области всегда будет мала по сравнению с  $\psi$ -функцией в малом отсеке, то волновая функция малого отсека будет экспоненциально убывать со временем:  $\psi_b \sim \exp(-t/2\tau)$ ,  $|\psi_b|^2 \sim \exp(-t/\tau)$ , если условиться не рассматривать самую начальную фазу распада. Если бы в малом отсеке было очень много частиц, скажем,  $N_0$  в начальный момент



$t = 0$ , то со временем их число убывало бы как  $N = N_0 \exp(-t/\tau)$ . Но если у нас только одна частица, то нужно говорить о вероятностях.

Кажется совершенно очевидным, что вероятность находиться частице в малом отсеке равна  $p_1 = \exp(-t/\tau)$ , а вероятность находиться в основной части термостата равна  $p_2 = 1 - \exp(-t/\tau)$ . У классической частицы именно так и проходил бы необратимый процесс ее проникновения через "прохудившуюся" перегородку. Пространственная часть энтропии (28) для частицы в термостате была бы значительно больше единицы, и монотонное возрастание вероятности  $p_2$  автоматически сопровождалось бы монотонным возрастанием энтропии (энтропию малого отсека можно считать равной нулю). Но квантовая частица ведет себя несколько сложнее.

Допустим, сначала, что правый торец представляет собой перегородку при нулевой температуре. Тогда, казалось бы, вероятности  $p_1$  и  $p_2$  должны относиться к малому отсеку и термостату, а их величины должны даваться приведенными выше соотношениями. Но мы тут же приходим к противоречию, поскольку энтропия  $S = -\sum_i p_i \ln p_i$  будет сначала возрастать, достигая максимума при  $p_1 = p_2 = 1/2$ , а затем будет убывать до нуля при  $p_1 \rightarrow 0$ ,  $p_2 \rightarrow 1$ . На самом деле, рассматриваемое нами состояние, состоящее из суперпозиции волновых функций в малом отсеке и в основном объеме, без вмешательства извне является чистым. До измерения оно имеет одно-единственное состояние. Только после многократных измерений можно получить величины для вероятностей нахождения в малом объеме  $p_1$  или для попадания в большой объем  $p_2$ .

До проведения измерения состояние является чистым, даже если оно не обладает фиксированной энергией. Например, если распад протекает очень медленно, можно было бы в какой-то момент посередине процесса адиабатически медленно увеличить длину  $L$  путем сдвига более далекого торца-загородки. При этом энергия той части волновой функции, которая была снаружи от малого отсека-ловушки, заметно понизилась бы по сравнению с  $\epsilon_{\min}^*$ . А вытекающая из отсека  $\psi$ -функция по-прежнему имела бы энергию  $\epsilon_{\min}^*$ . Таким образом, у нас образовалась бы  $\psi$ -функция в виде суперпозиции двух состояний с различными энергиями.

До проведения измерений эта суперпозиция опять является чистым состоянием. С помощью внешней силы на частоте, отвечающей разности энергетических уровней, можно было бы свободно изменять соотношение между амплитудами двух подуровней. Таким образом, до проведения измерения узнать о факте радиационного распада нельзя.

Однако, если допустить, что правая торцевая крышка не является зеркально отражающей, то первый же удар о нее частицы засвидетельствует, что частица несколько раньше вылетела из малого начального объема. Такой удар с возбуждением фононов в торцевой крышке служит измерительным актом, после которого  $\psi$ -функция малого объема практически исчезает, а  $\psi$ -функция в основном объеме термостата приобретает нормировку на единицу. Другими словами, неупругий удар о стенку осуществляет коллапс вероятностей (до того момента существовавших как возможности, но не как реальные числа), а именно,  $p_1 \rightarrow 0$ ,  $p_2 \rightarrow 1$ . Только многократное повторение процесса распада может дать зависимость  $N = N_0 \exp(-t/\tau)$ , на основании которой можно составить представление об эволюции средних по ансамблю априорных вероятностей  $p_1$  и  $p_2$ .

После первого удара частица оказывается зафиксированной внутри термостата, будучи "измеренной" вместе с приближенной траекторией от точки "распада", а затем начинается процесс установления равновесия с термостатом. Частица обменивается фононами со стенкой, ее средняя энергия понижается, а распределение по уровням приближается к максвелловскому. В конце концов энергия частицы достигнет среднего теплового значения  $\varepsilon = T/2$ , а остаток энергии  $\varepsilon_{\min}^* - T/2$  будет передан стенке в виде порции тепла  $\Delta Q = \varepsilon_{\min}^* - (T/2)$ . Внутренняя энтропия частицы достигнет при этом величины (73), т.е.  $s \cong \ln(L/b_0)$ , а энтропия термостата возрастет на величину  $\Delta S = \Delta Q/T = (\varepsilon_{\min}^*/T) - (1/2)$ . Вся эта вторая стадия процесса носит существенно необратимый характер с возрастанием энтропии.

Но вернемся опять к первой стадии, т.е. до первого удара. Пусть  $\psi_b$  — нормированная волновая функция в малом отсеке, а  $\psi_L$  — нормированная волновая функция в свободном объеме холодного термостата. Обе эти функции отвечают одной и той же энергии, если  $\tau \rightarrow \infty$ . При конечных значениях  $\tau$  волновую функцию можно представить в виде суперпозиции

$$\psi = c_b \psi_b + c_L \psi_L, \quad (78)$$

где  $c_b$ ,  $c_L$  — соответствующие амплитуды. Согласно правилам квантовой механики величины  $|c_b|^2$ ,  $|c_L|^2$  соответствуют вероятностям соответствующих состояний при проведении многократных измерений. Каждое из таких измерений осуществляет коллапс волновой функции либо в  $\psi_b$ , либо в  $\psi_L$ . В рассматриваемом нами случае роль измерительного прибора играет второй торец большого объема, а само измерение осуществляет коллапс  $\psi \rightarrow \psi_L$ . Измерительный прибор, согласно квантовой механике, не может преднамеренно

произвести этот коллапс. Он просто выжидает тот момент, когда коллапс случается, и по многим результатам измерений дает возможность найти  $p_2(t) = 1 - \exp(-t/\tau)$ . Сам акт коллапсирования является сугубо случайным. Как выразился Эйнштейн, процесс выглядит так, как если бы "Бог играл в кости". Сам Эйнштейн полагал, что за этой случайностью скрывается более глубокая закономерность. Но поскольку она не найдена, приходится оставаться на ортодоксальной квантовомеханической точке зрения. Более того, как показали эксперименты по проверке нарушения неравенств Белла (см. раздел 26), именно ортодоксальная точка зрения и является правильной.

Итак, мы можем заключить, что наш процесс релаксации неравновесного состояния начинается с первого неупругого удара частицы о стенку термостата. Этот удар, с точки зрения квантовой механики, представляет собой случайный акт коллапса волновой функции:  $\psi \rightarrow \psi_L$ . Одно чистое состояние частицы превращается в другое чистое состояние, но при этом в стенке происходит необратимый процесс излучения фонона, который уходит во внешний мир. От него может остаться память в виде одного бита информации, спрятанного где-то глубоко в стенке. В принципе, если бы рядом со стенкой размещался некоторый автомат, то этот бит информации мог бы быть превращен в последующее действие автомата по заранее составленному алгоритму. Например, он мог бы использовать часть энергии "распада" для производства работы.

Рассмотрим еще один мысленный эксперимент. Допустим, что узкая ловушка шириной  $b \ll b_0$  размещена не в торце, а точно посередине термостата длиной  $L$ . Предположим также, что у ловушки имеется два малых отверстия, так что частица с равной вероятностью может выскочить либо в левый, либо в правый полубъемы.

Процесс релаксации опять начинается с первого удара. Теперь это может быть удар либо о левую, либо о правую стенку. Первый удар оставляет в соответствующей стенке один бит информации. После этого происходит последующий процесс релаксации, который опять рождает энтропию  $\Delta S = \Delta Q/T = (\epsilon_{\min}^*/T) - (1/2)$  в соответствующей стенке. А вот энтропия частицы будет равна на этот раз  $s \cong \ln(L/2b_0) = \ln(L/b_0) - \ln 2$ , поскольку область, занятая частицей, равна лишь половине длины  $L$ . Энтропия частицы оказалась на 1 бит меньше. Смещая затем центральную перегородку в сторону пустого объема, можно было бы совершить работу. Но для этого нужно знать, в какой именно половине находится частица, а для этого требуется использовать тот самый бит информации, который ушел в стенку при первом ударе. Таким образом, мы опять не сможем безвозмездно использовать тепловую энергию частицы.

Итак, рассмотренный нами "радиоактивный" распад — это необратимый процесс релаксации к термодинамическому равновесию. Он начинается с необратимого акта коллапса волновой функции, при котором рождается энтропия во внешнем мире. Вслед за этим происходит тепловая релаксация, при которой возрастает как энтропия частицы, так и энтропия внешнего мира. В нашем примере запас энергии содержался в самой частице и поэтому для диссипации не потребовалось дополнительной энергии или дополнительного введения негэнтропии извне системы.

## 16. Кот Шрёдингера

Итак, волновая функция  $\psi$  имеет следующий физический смысл. В случае многих тождественных частиц величина  $|\psi|^2$  пропорциональна плотности частиц в данной точке пространства. Если мы переходим к одной частице, то величина  $|\psi|^2 \Delta x$  приобретает смысл вероятности находиться данной частице в интервале  $\Delta x$  вблизи данной точки пространства. Волновая функция эволюционирует в соответствии с линейным уравнением Шрёдингера, которое допускает суперпозицию линейных решений, т.е. суперпозицию различных состояний. В такой суперпозиции складываются именно функции, а не их квадраты  $|\psi|^2$ . Поэтому обычный закон сложения вероятностей действует лишь в том случае, если волновые функции различных состояний не перекрываются в пространстве или имеют взаимно некоррелированные фазы. Такая декорреляция может происходить при взаимодействии частицы с внешним окружением. Если окружение фиксирует одно из состояний частицы, то волновая функция коллапсирует.

Внешний мир, казалось бы, должен быть классическим, т.е. макротела должны быть не волновыми, а точечными (или протяженными) объектами с фиксированными координатами, изменяющимися со временем по законам классической механики. Но такой подход означает, что между волновым микромиром и классическим макромиром располагается пропасть: при обычном подходе нельзя перейти из одного мира в другой. А именно, если идти со стороны микромира, то следует включать в описание с помощью уравнения Шрёдингера для многих частиц объекты все большего и большего размера, включая в пределе всю Вселенную. Напротив, если идти со стороны классического макромира, то естественно продолжить классическое описание вплоть до самых малых частиц и самых малых размеров. Граница между микромиром и макромиром не определена, и ее обсуждение вызывало и продолжает вызывать много вопросов.

Наиболее четко соответствующее противоречие было указано Шрёдингером [6] в его знаменитом мысленном эксперименте с котом. Допустим, что имеется счетчик Гейгера, который регистрирует пролетающие через него  $\beta$ -частицы от  $\beta$ -распада ядер. К этому счетчику пристыковано устройство, которое может разбить ампулу с цианистым калием в случае пролета частицы. Если ампула находится вместе с живым котом под стеклянным колпаком, то согласно стандартной квантовой механике существует возможность суперпозиции живого и погибшего кота, если счетчик не произвел еще измерения и находится в состоянии суперпозиции зарегистрированного и незарегистрированного пролета частицы.

Разумеется, без  $\beta$ -частицы ни у кого и мысли не могло бы возникнуть о допущении такой странной суперпозиции. Все дело именно в микрочастице, которая по определению должна описываться квантовой механикой. Эта частица вступает во взаимодействие с более сложной системой — счетчиком Гейгера, а через него и с ампулой, и в конце концов, с котом. Естественный подход к описанию всего процесса состоит в расширении системы от  $\beta$ -частицы к счетчику и т.д. При этом последовательно увеличивается число динамических переменных и расширяется гильбертово пространство, в котором определена волновая функция. Кажется, что на каждом шаге следует использовать уравнение Шрёдингера. И в результате мы приходим к возможности абсурдной суперпозиции двух необратимых процессов.

Ясно, что основной вывод из этого рассуждения состоит в том, что обратимое уравнение Шрёдингера не годится для описания необратимых процессов (впрочем, это утверждение не является пока общепризнанным). Как мы видели выше, очень малое взаимодействие с необратимым внешним окружением существенно влияет на необратимую эволюцию сложной квантовой системы. Соответственно, и описание такой системы отличается от простого использования уравнения Шрёдингера.

В рассматриваемом здесь случае уравнение Шрёдингера описывает  $\beta$ -распад ядра и сферически симметричную волновую функцию вылетающей  $\beta$ -частицы. Если радиоактивное ядро находится в воздухе, то уравнение Шрёдингера расширенной системы описывает рассеяние атомов газа на  $\beta$ -частице и их возможную ионизацию. Но обратимая эволюция такой системы существует только в течение времени порядка времени свободного пробега атомов газа. Вслед за этим происходит коллапс волновых пакетов атомов газа, который сопровождается коллапсом волновой функции  $\beta$ -частицы: из сферически симметричной она превращается в свободно летящий локализованный пакет,

сопровожаемый треком рассеянных и ионизованных атомов. Этот явно необратимый процесс можно рассматривать как переброс системы из одного гильбертова пространства в другое с полным исчезновением первоначальной сферически симметричной волновой функции. Если между радиоактивным ядром и счетчиком Гейгера находится вакуум, то описанный процесс коллапса происходит в счетчике Гейгера. Он-то и приводит в конце концов к неустранимому печальному исходу.

Итак, в рамках логически обоснованного подхода к описанию необратимых процессов не может быть суперпозиции живого и погибшего кота: процесс развивается только по одному из возможных необратимых сценариев. При этом приходится отказаться от буквального использования обратимого уравнения Шрёдингера и следует ввести коллапсы волновых функций в сценарий их эволюции.

Однако ортодоксальная квантовая механика не охватывает процесса необратимого измерения, и возможность нереальной суперпозиции показывает, что между квантовым микромиром и классическим макромиром существует промежуточная область, которая не покрывается стандартной квантовой механикой и требует специального рассмотрения. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже.

## 17. Необратимость нашего окружения

Не только жизнь на Земле, но и многие другие неравновесные процессы на нашей планете в существенной мере определяются потоком излучения от Солнца. Солнечная постоянная, т.е. поток энергии на среднем расстоянии Земли от Солнца, составляет величину  $1,4 \times 10^6$  эрг  $\text{см}^{-2} \text{с}^{-2}$ . Если не учитывать альбедо, то вся эта энергия в конце концов превратится в тепловую энергию при температуре  $T$  около 300 К. Нетрудно оценить соответствующий темп рождения энтропии, приходящийся на  $1 \text{ см}^2$  в секунду:  $\dot{S}_0 \sim 3 \times 10^{19} \text{ см}^{-2} \text{с}^{-1}$ . Если учесть, что температура Солнца составляет около  $6 \times 10^3$  К, т.е. в двадцать раз превышает температуру поверхности Земли, и тот факт, что солнечная радиация заключена в очень малом телесном угле, то легко оценить, что доля солнечной энтропии в величине  $\dot{S}_0$  составляет не более одного процента. Другими словами, солнечная энергия имеет очень высокую степень упорядоченности и до превращения в тепло она несет с собой поток информации  $\dot{I}_0$  того же порядка величины, что и  $\dot{S}_0$ . Поток информации  $\dot{I}_0$  составляет гигантскую величину масштаба  $\sim 4 \times 10^{19}$  бит  $\text{см}^{-2} \text{с}^{-1}$ . Она не сопоставима ни с одним из искусственных потоков информации, созданных человеком.

Разумеется, если этот поток информации отнести к тому числу молекул, которым этот поток передается, то в расчете на одну молекулу получаются гораздо более скромные числа. Например, если разделить поток  $\dot{I}$  на число молекул атмосферы Земли, отнесенное к  $1 \text{ см}^2$  поверхности, то поток информации, приходящийся на одну молекулу, не превысит одного бита в неделю. Но все же и это число не так уж мало. Следует еще учесть, что не вся энергия переходит в тепло. А именно, часть солнечной энергии перехватывается атмосферой и служит источником формирования воздушных потоков, ветров, облаков, осадков и т.д. Другая часть энергии идет на фотосинтез белков растительным миром, которые в свою очередь служат питанием и поддерживают жизнь животного мира. Таким образом, наряду с деградацией упорядоченной солнечной энергии и превращением ее в тепло, идет одновременный процесс самоорганизации и усложнения структур окружающей нас Природы. Все процессы развития только потому и происходят, что они сопровождаются мощным процессом роста энтропии за счет уменьшения степени порядка энергии, поступающей от Солнца.

В целом атмосфера и биосфера Земли представляют собой сложную открытую систему. Стационарный баланс потоков энергии устанавливается за счет теплового излучения Земли в космическое пространство: на Землю приходит энергия с малой энтропией, а уходит с энтропией намного большей. Но нельзя сказать, что необратимый процесс возрастания энтропии идет совершенно монотонно во всех составных частях сложной системы. Напротив, общий рост энтропии сопровождается процессом создания упорядоченных структур с уменьшением локальных величин энтропии. Именно за счет глобального роста энтропии и возникает возможность противоположного процесса локальной организации и развития порядка. Ситуация здесь сходна с ирригационной системой, использующей механизмы для перекачки воды с нижнего уровня на более высокий: сама падающая вниз вода приводит в действие водяное колесо, перекачивающее часть воды вверх. Большой поток вниз создает малый поток вверх.

Крупный физик нашего времени профессор Хокинг использовал следующий лекторский прием для демонстрации необратимости. Он показал небольшой эпизод из кинофильма, когда чашечка с кофе соскальзывала со столика, падала на пол и разбивалась, а кофе разливался по полу. "Всем нам хорошо знаком такой сценарий", — комментировал он этот эпизод. "Обратный процесс просто невозможен", — добавлял он и показывал кино в обратную сторону: лужица кофе собиралась в складывающуюся из осколков чашечку, затем

чашечка с кофе подпрыгивала и успокаивалась на поверхности столика. Естественно, что и каждый из нас не поверит в возможность такого чуда, хотя, может быть, и не каждый будет размышлять о том, что происходит при этом с энтропией.

Но ведь данный эпизод начался с того, что чашечка с кофе стояла на столе. А миллион лет тому назад ничто не свидетельствовало в пользу того, что такая чашечка появится в результате чисто необратимого процесса с непрерывной деградацией глобального порядка и монотонного роста полной энтропии при термализации потока энергии, приходящего от Солнца. Именно за счет этой общей деградации энергии и стал возможен процесс, опять-таки необратимый, встречного развития с уменьшением локальной энтропии и созданием сложно организованной материи. Именно он-то и привел, в конце концов, к появлению чашечки с кофе на столике.

Можно сказать, что не только в общей открытой системе, через которую протекает упорядоченная энергия с рождением энтропии, но и в отдельных открытых частях такой системы идут сразу два процесса: деградация по пути к хаотическому тепловому движению молекул и самоорганизация с усложнением структур и роста относящейся к ним доли информации (т.е. уменьшение энтропии).

Для полного понимания необратимости следует учитывать сразу оба процесса: самоорганизацию с небольшим уменьшением энтропии и деградацию порядка с термализацией энергии и рождением энтропии в гораздо более мощном темпе. Полное понимание необратимости невозможно без понимания как разрушения, так и упорядочения.

## 18. Кто бросает кости?

Присущее квантовой теории вероятностное описание событий естественно вызывает вопрос о том, не стоит ли за случайными событиями более сложная детерминированная картина физических процессов, которую мы пока просто не умеем описать из-за ее сложности. Попытки введения в квантовую теорию так называемых скрытых параметров делались неоднократно. Но вместе с тем достаточно убедительно было показано, начиная с работ фон Неймана, а затем в более поздних исследованиях, что логическая структура квантовой теории является замкнутой и исключает возможность введения скрытых параметров. (Рассуждения самого фон Неймана не вполне точны (см., например, [34]), но это обстоятельство не меняет сути дела.)

Откуда же берется случайность? Кто же в конце концов бросает кости? Чтобы понять, о чем идет речь, нужно обсудить сначала саму



игру. Пусть два игрока бросают поочередно кубик, шесть граней которого имеют номера от единицы до шести. Эта нумерация обычно обозначается просто числом точек на гранях. После бросания кубика игроки по условленным заранее правилам устанавливают, кто и сколько выиграл. Обычно каждая из граней выпадает совершенно случайно с вероятностью  $1/6$ . Почему же случайно?

Дело в том, что до полного успокоения кубик успеваает совершить очень много кувырканий. Допустим, например, что кубик совершает 100 оборотов. Тогда, чтобы повторно выпала та же самая грань, кубик нужно бросать с точностью, не меньшей  $1/600$ . Здесь цифра 6 учитывает число граней. С такой точностью повторить бросок кубика практически невозможно. Более того, если бы в бросании кубика появилась повторяемость, то второй игрок мог бы заподозрить первого игрока в шулерстве. Итак, за случайность в данном случае ответственны руки игроков. И то, что выпадение чисел случайно, говорит скорее в пользу несовершенства игроков, не умеющих точно координировать свои движения, чем в пользу их сознательного поведения.

Вместо бросания кубика можно было бы придумать устройство, обеспечивающее совершенно хаотическое движение кубика в закрытом от игроков ящике. Время от времени игроки открывали бы крышку этого ящика и считывали бы результат. Вот здесь-то мы и обнаруживаем объективно происходящий случайный процесс. А именно, движение кубика в ящике можно рассматривать как аналог хаотического теплового движения. Следовательно, кубик в закрытом ящике обладает энтропией  $S = \ln 6$ . Как только крышка открывается и оба игрока бросают взгляд на кубик, происходит следующее. Энтропия кубика коллапсирует в нуль, поскольку теперь грань кубика точно определена с вероятностью единица. Вместе с тем, у каждого из игроков появляется информация  $I = \ln 6$ , которая может затем развиться в последующие события: один из игроков может побледнеть, а другой улыбнуться от радости. Но для того чтобы эта информация была воспринята, каждый из игроков должен непременно уничтожить часть своей упорядоченной структуры и перевести в хаос, т.е. в энтропию, не менее чем  $I = \ln 6$  своей собственной информации.

Допустим теперь, что наши игроки решили вместо кубика использовать броуновскую частицу, чтобы полностью исключить любую возможность регулярности движения. Нам довольно безразлично, какую позицию они решили считать выигрышной, и предположим просто, что они периодически измеряют положение частицы, а потом возвращают ее в начало координат. Пусть эта частица представляет собой пылинку, парящую в воздухе сосуда объемом  $1 \text{ см}^3$ . Движение

такой пылинки происходит совершенно независимо от наблюдателей и абсолютно хаотично. Именно здесь-то и был бы уместен оборот: "Бог играет в кости". Но не будем спешить.

Рассмотрим, насколько случайно рассматриваемое движение. В одном кубическом сантиметре воздуха содержится порядка  $N \sim 10^{19}$  молекул. Следовательно, на одну молекулу приходится объем  $V_0 \sim 10^{-19}$  см<sup>3</sup>. Если мы хотим зафиксировать каждую из молекул в объеме, не меньшем  $V_0$ , то согласно формуле (29) конфигурационная часть энтропии газа составит величину, не меньшую  $N \sim 10^{19}$ . Допустим теперь, что мы хотим зафиксировать, т.е. как бы "заморозить" это состояние. Тогда оно станет обладать информацией  $I \sim S \sim 10^{19}$ . Пусть к тому же у нас появилось желание контролировать эту сложную систему, подправляя ее каждый раз через промежутки времени  $\tau \sim l/c_s \sim 10^{-11}$  с. Здесь  $l \sim 10^{-6}$  — среднее расстояние между молекулами, а  $c_s = 300$  м с<sup>-1</sup> — скорость звука. Мы видим, что для управления движением газа необходимо иметь поток информации, превращаемый в энтропию, масштаба  $\sim 10^{30}$  с<sup>-1</sup>. Эта величина в  $10^{10}$  раз больше, чем может обеспечить поток солнечной энергии на 1 см<sup>2</sup>. Другими словами, если у кого-то и появилось бы желание помочь одному из игроков, то он должен был бы обладать духовным потенциалом, способным поддерживать упорядоченное движение молекул за счет хаотизации потока информации масштаба приходящего от Солнца на один квадратный километр.

Поэтому более правильным будет сказать, что не Бог играет в кости, а наоборот, из-за полного безразличия Бога к данной игре она протекает на базе чистой случайности, порождаемой стихийной Природой.

Случайность можно считать неотъемлемым свойством материи, находящейся в тепловом движении. Наблюдение за случайным процессом обнаруживает хаотичность последовательных числовых значений случайной величины. Поэтому наиболее правильный подход к их описанию базируется на понятиях вероятностей или функций распределения вероятностей, если случайная величина может рассматриваться как непрерывная. Если в рассмотрение включаются случайные события, то при наличии информационных связей их следует анализировать с учетом одновременно протекающих сложных событий у наблюдателя или, в общем случае, во внешнем Мире.

## 19. Броуновское движение

Рассмотрим одномерное движение классической броуновской частицы. Наиболее удобный подход к описанию такого движения

опирается на уравнение Ланжевена

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = \frac{F}{m}. \quad (79)$$

Здесь  $v$  — скорость частицы,  $\gamma$  — коэффициент трения,  $m$  — масса частицы, а  $F$  представляет собой случайную силу, создаваемую хаотическими ударами молекул о частицу.

Пусть при  $t = 0$  скорость частицы равна нулю. Тогда согласно (79) имеем

$$v = \frac{1}{m} \int_0^t \exp[-\gamma(t-t')] F(t') dt'. \quad (80)$$

Если среднее значение силы  $\langle F \rangle = 0$ , то и среднее значение скорости равно нулю. Однако среднеквадратичное значение отлично от нуля и равно

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^t \exp[-2\gamma t + \gamma(t' + t'')] \langle F(t') F(t'') \rangle dt' dt''. \quad (81)$$

Так как удары молекул совершаются очень часто, то сила  $F$  имеет очень малый масштаб временной корреляции, так что приближенно можно считать  $\langle F(t') F(t'') \rangle = F^2 \tau \delta(t' - t'')$ . Здесь  $F^2$  — характерный масштаб квадрата силы, а  $\tau$  — характерное время корреляции. После этого выражение (81) принимает вид

$$\langle v^2 \rangle = \frac{F^2 \tau}{2m^2 \gamma} [1 - \exp(-2\gamma t)]. \quad (82)$$

Как мы видим, при малых  $t$  среднеквадратичное значение  $\langle v^2 \rangle$  возрастает со временем как  $\langle v^2 \rangle = F^2 \tau m^{-2} t$ , а при  $t \rightarrow \infty$  оно стремится к постоянному значению  $F^2 \tau / 2m^2 \gamma$ . Но при тепловом равновесии это предельное значение должно равняться  $T/m$ , так что получаем

$$D_v \equiv \frac{F^2 \tau}{2m^2} = \frac{\gamma T}{m}. \quad (83)$$

Здесь мы ввели обозначение  $D_v$  для коэффициента диффузии по скорости. Согласно (82) при малых значениях  $t$  величина  $\langle v^2 \rangle = 2D_v t$ . Введем еще в рассмотрение функцию распределения по скоростям  $f(v, t)$ . Если бы случайная функция отсутствовала, то все значения скорости убывали бы как  $v_0 \exp(-\gamma t)$ . В этом случае функция распределения изменялась бы по закону  $f(v, t) = \exp(\gamma t) f_0[v \exp(\gamma t)]$ , где  $f_0(v_0)$  — распределение по скоростям при  $t = 0$ .

Легко видеть, что при этом

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} (vf).$$

С другой стороны, если  $\gamma$  обратилась бы в нуль, а случайная сила присутствовала, то возникла бы диффузия по скоростям. В самом деле, при этом

$$f(v, t + \Delta t) = f(v - \Delta v, t) \cong f(v, t) - \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (\Delta v)^2,$$

где  $\Delta v$  можно найти по формуле (80). Усредняя, получим  $\langle (\Delta v)^2 \rangle = 2D_v \Delta t$ . Соответственно, разлагая левую часть по  $\Delta t$  и устремляя  $\Delta t$  к нулю, получим уравнение диффузии. Вместе с членом с  $\gamma$  оно имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} vf + D_v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \quad (84)$$

Это уравнение называется уравнением Фоккера – Планка. При больших временах достигается стационарное распределение, которое в силу соотношения (83) принимает вид распределения Максвелла

$$f_m = \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right). \quad (85)$$

Время установления максвелловского распределения обычно бывает очень мало.

Если условиться рассматривать промежутки времени значительно большие  $1/\gamma$ , то движение частицы по координате  $x$  можно рассматривать как диффузию. В самом деле, найдем величину

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle v(t')v(t'') \rangle dt' dt''. \quad (86)$$

Поскольку  $v$  выражается с помощью формулы (80) через интеграл от случайной силы, а силу мы считаем  $\delta$ -коррелированной, то

$$\langle v(t')v(t'') \rangle = \frac{T}{m} \exp[-\gamma(t' - t'')],$$

и выражение (86) приводит к соотношению  $\langle x^2 \rangle = 2Dt$ , где коэффициент диффузии равен  $D = 2T/\gamma m$ . Соответственно, по аналогии с

выкладками, приведшими к уравнению (84), нетрудно получить уравнение для вероятности распределения частицы  $p(x, t)$  по координате  $x$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (87)$$

Итак, описание эволюции частицы по скорости приводит к уравнению Фоккера – Планка, а диффузия частицы с установившимся по скорости распределением при  $\gamma t \gg 1$  описывается уравнением (87).

Если вначале частица локализована по скорости и по координате и ее энтропия очень мала, то со временем энтропия будет монотонно возрастать. В распределении по скорости это происходит за счет приближения к максвелловскому распределению, а конфигурационная составляющая энтропии увеличивается благодаря тому, что частица диффузионно занимает все больший и больший интервал по  $x$ .

Перейдем теперь к обсуждению броуновского движения квантовой частицы. Здесь нам хочется подчеркнуть качественную сторону вопроса, и поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь крайне упрощенного варианта движения. А именно, рассмотрим уже обсуждавшийся качественно в разделе 13 пример частицы в ограниченном одномерном сосуде со стенками, находящимися при разных температурах. Тем самым мы сразу учтем возможность протекания неравновесного процесса.

Итак, пусть частица с массой  $m$  находится внутри сосуда длиной  $L$ , у которого один торец находится при температуре  $T_1$ , а второй при температуре  $T_2 < T_1$ . Температуру холодильника  $T_2$  мы будем всегда считать ниже температуры нагревателя  $T_1$ . Рассматриваем только одномерное движение.

Пусть в начальный момент частица была локализована в интервале  $b \ll L$ . Если величина  $b$  не очень мала, то в течение некоторого времени, пока волновой пакет не расплылся, можно использовать классическое рассмотрение. Пусть  $v$  — скорость частицы. При столкновении со стенками эта скорость будет случайно изменяться, так что в течение некоторого времени для изменения скорости можно использовать уравнение Ланжевена. Что касается геометрического перемещения частицы по координате  $x$ , то оно нас мало интересует: ведь это просто свободный пролет от одной стенки к другой и обратно. Время пролета от одной стенки к другой составляет величину  $L/v$ , так что частота столкновений с каждой из стенок равна  $v/2L$ .

Допустим, что при каждом столкновении со стенкой частица может терять часть импульса, так что ее скорость уменьшается на величину

$\alpha v_T$ , где  $v_T = (T_1/m)^{1/2}$ , а коэффициент  $\alpha$  есть просто число, меньшее единицы. Тогда потерю импульса при столкновении с одной из стенок можно описать как равномерное торможение с темпом

$$-\frac{\gamma}{2} v \cong \frac{\alpha v_T}{2L} v.$$

Если приближенно считать, что потери импульса на горячей и холодной стенках не сильно отличаются от этого значения, то для потерь на обеих стенках величина  $\gamma = \alpha v_T/L$ . Существует хорошо известная флуктуационно-диссипационная теорема, согласно которой тот же самый механизм, который отвечает за диссипацию, порождает и сами флуктуации. В нашем случае — это нагрев частицы за счет диффузии. Учитывая соотношение (83), мы можем записать уравнение Фоккера — Планка в прежнем виде (84), но при  $T_2 \neq T_1$  мы имеем разные коэффициенты диффузии на левой и правой стенках, так что

$$D_v = \frac{\gamma}{2m} (T_1 + T_2). \quad (88)$$

Нетрудно видеть, что распределение частицы по скоростям приближается к максвелловскому со средней температурой  $T_0 = (T_1 + T_2)/2$ .

Обсудим теперь вопрос, как долго нам позволительно пользоваться классическим подходом. Для этого нужно понять, как быстро волновой пакет будет расплываться со временем. Сначала посмотрим, что происходит с температурой частицы, если она еще не достигла равновесного значения. Умножим уравнение (84) на  $mv^2$  и проинтегрируем его по скоростям. Предполагая, что распределение по скоростям близко к максвелловскому, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\gamma(T - T_1) - \gamma(T - T_2). \quad (89)$$

Мы воспользовались здесь соотношением (88) для величины  $D_v$ .

Согласно (89) частица стремится к равновесию с каждым из торцов с темпом  $\sim \gamma$ . В равновесии, т.е. при  $T = (T_2 + T_1)/2$ , частица получает тепло от горячей стенки с темпом  $q = \gamma(T_1 - T_2)/2$  и точно с таким же темпом передает это тепло холодной стенке. Другими словами,  $q$  — это величина теплового потока, переносимого частицей. В результате теплопереноса в холодную стенку поступает поток энтропии, равный

$$\dot{S}_e = \frac{q}{T_2} = \frac{\gamma}{2} \left( \frac{T_1}{T_2} - 1 \right). \quad (90)$$

Но за счет этого потока энтропии в стенке могут происходить необратимые процессы типа запоминания информации о факте удара частицы о стенку. Можно сказать, что этот рост энтропии свидетельствует о своего рода "измерении", проведенным над частицей. Его можно представить себе как некоторый процесс разрушения взаимно когерентных частей волнового пакета. Грубо говоря, если величина  $\Delta S_e \sim 1$ , то волновой пакет может расщепиться на две взаимно некогерентные половины. При этом осуществляется коллапс волновой функции: одна из ее половин уничтожается, и тем самым увеличивается запас информации, т.е. "знания" у холодной стенки в отношении пакета, но это знание "покупается" ценой увеличения энтропии стенки  $\Delta S_e \sim 1$ . Если такой процесс повторяется многократно, то волновой пакет частицы будет в среднем удерживаться в локализованном состоянии. Ширину локализации пакета можно оценить с помощью соотношения (61), которое описывает расширение пакета со временем, если его начальная локализация была равна  $b$ :  $\langle x^2 \rangle = b^2 + (\hbar^2 t^2 / m^2 b^2)$ . Если пакет "поджимается" при последовательных столкновениях с холодной стенкой, то ширина расплзания должна быть масштаба начальной ширины пакета. Другими словами, при  $t \sim 1/\dot{S}_e$  имеем  $b^2 \sim \hbar^2 / m^2 b^2 \dot{S}_e^2$ . Отсюда находим ширину локализации:

$$b \cong \left( \frac{\hbar}{m \dot{S}_e} \right)^{1/2}. \quad (91)$$

Согласно соотношению (90) при температуре  $T_1$ , заметно большей  $T_2$ , величина  $\dot{S}_e$  имеет порядок величины  $\gamma = \alpha v_T / L$ , где  $\alpha$  — численный множитель, который можно считать порядка единицы. Таким образом, согласно (91) получаем оценку  $b \sim (b_0 L)^{1/2}$ , где введенная нами раньше величина  $b_0 = \hbar(mT)^{-1/2}$  представляет собой характерную ширину локализации матрицы плотности. Даже для электрона при  $L = 1$  см и  $T = 10$  эВ оценка для  $b$  дает сравнительно малую величину:  $b \sim 10^{-4}$  см. Другими словами, неравновесность приводит к сильной локализации частицы с появлением у нее тех свойств, которые мы обычно и связываем с микрочастицей.

Если  $b \ll L$ , то поведение такой частицы можно описывать классической механикой. Каждый из возможных волновых пакетов будет иметь ширину "по скорости" масштаба  $v_T b_0 / b \ll v_T$ . Следовательно, распределение частицы по скоростям можно считать непрерывным с некоторой функцией распределения  $f(v)$ .

## 20. Микромир и макромир

Открытие квантовой механики сразу поставило много вопросов, ответы на которые до сих пор нельзя считать вполне удовлетворительными. Впрочем, это не мешает пользоваться мощным теоретическим аппаратом квантовой теории в применении к обширному кругу физических явлений. И нигде еще квантовая механика не потерпела фиаско, объясняя практически все, что было обнаружено экспериментально (мы имеем в виду прежде всего нерелятивистскую теорию). Тем не менее остается вопрос, почему теория предсказывает только вероятности случайных процессов микромира, да и почему эти процессы являются случайными. А самое главное — трудно понять, где лежит граница между квантовой и классической физикой.

То, что классические макроскопические тела не имеют никаких видимых волновых свойств, очевидно каждому из нас. А с другой стороны, все микрочастицы ведут себя в точности так, как предсказывает квантовая механика, свидетельствуя об универсальности волновой сущности микромира. Итак, где же лежит промежуточная область, и если она есть, то каким теоретическим аппаратом ее можно описывать?

В этом разделе мы обсудим этот вопрос чисто качественно, чтобы было яснее, в каком направлении будет строиться дальнейшее изложение. Главное, что характерно для предметов нашего окружения, это их постоянная информационная связь. Вся природа купается в лучах солнечного света, переливаясь всеми красками, и этого уже достаточно, чтобы живые существа вели постоянное наблюдение за своим окружением. Аналогичная связь через свет может существовать и между объектами неживой природы. С точки зрения квантовой механики это означает, что положение макротел постоянно "измеряется" окружающими их живыми и неживыми телами. Поэтому  $\psi$ -волны макротел подвержены постоянному разрушению когерентности. Мы живем в мире разрушенной когерентности и непрерывно продолжающегося ее разрушения. Попробуем оценить, где пролегает естественная граница между микромиром и макромиром. Для этого мы воспользуемся соотношением (91) для ширины неравновесного волнового пакета.

Пусть имеется макротело с плотностью  $\rho = 1 \text{ г см}^{-3}$ , имеющее поперечный размер  $L$ . Масса этого тела  $m = \rho L^3$ . На тело прямо или косвенно поступает поток информации, превращаемый затем в энтропию, который можно оценить как  $\dot{S}_c = L^2 \dot{S}_0$ , где  $\dot{S}_0 \sim 10^{19} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  — поток, создаваемый на Земле Солнцем.



Рассмотрим теперь тело, у которого ширина локализации (91) имеет масштаб его собственных размеров. Такое тело, очевидно, и находится где-то на границе между макро- и микромиром. Подставляя величины, получаем оценку

$$L \sim \left( \frac{\hbar}{\rho \dot{S}_0} \right)^{1/7} \approx 10^{-5} \text{ см.} \quad (92)$$

Разумеется, это слишком грубая оценка, но уже она показывает, что к макромиру принадлежат все тела, видимые глазом, в том числе с помощью микроскопа. Напомним, что длина волны видимого света составляет величину  $\lambda \sim 10^{-4}$  см, так что минимальные размеры макротела  $\sim 0,1$  мкм заведомо не превышают  $\lambda$ .

Итак, все предметы нашего макроскопического окружения "схлопнули" свои волновые пакеты до размеров, значительно меньших их поперечных размеров, и представляются нам четко очерченными и допускающими описание в классических терминах твердых, жидких или газообразных тел. Для этого достаточно ввести соответствующие классические переменные и действовать в духе классической теоретической механики. Другими словами, мы приходим к обычной динамике.

У микрочастиц, напротив, преобладает волновое поведение. И если мы захотим что-то узнать о поведении микрочастицы, нам придется привести ее во взаимодействие с макроскопическим прибором, поставленным между частицей и наблюдателем. Этот прибор, включая его составные части, все время находится в состоянии информационного обмена с окружением. Благодаря ему волновая функция прибора "живет" в режиме неустрашимого разрушения ее когерентности. Именно разрушение когерентности волновой функции прибора и происходит чисто случайно за счет многих связей с классическими объектами окружения.

Сам прибор устроен таким образом, что разным состояниям микрочастицы соответствуют разные состояния "стрелки прибора". Выбор внешним миром одного из показаний стрелки автоматически разрушает когерентность волновой функции микрообъекта. Все это выглядит как чисто случайный процесс, но при его многократном повторении проглядываются черты статистической закономерности, которые описываются на языке превращения чистого ансамбля в смешанный. При этом  $|\psi|^2$  играет роль плотности вероятности. Прибор лишь указывает, в какой части из приготовленного прибором полного набора состояний оказалась сама частица при данном измерении.

## ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Запутанность квантовых состояний представляет собой центральное понятие, которое необходимо для того, чтобы разобраться в таких вопросах, как информационная открытость квантовых систем, коллапсы волновых функций, квантовые измерения. Но начинается глава с обсуждения более простых явлений и процессов. В разделах 21–23 обсуждается вопрос об информационном взаимодействии классической или квантовой частицы с классическим окружением. В разделе 24 обсуждается проблема квантовых измерений в том виде, в каком она изложена Швингером. И только затем кратко излагается знаменитая работа Эйнштейна – Подольского – Розена, которая и привела к понятию запутанности состояний (этот термин был предложен Шрёдингером). Как известно, Эйнштейн, Подольский и Розен высказывали сомнения в правильности квантовой теории на том основании, что она вступала в противоречие с более привычными понятиями "элементов реализма" — тех характеристик физических систем, которые должны были бы существовать перед измерениями. В ответе Н. Бора было показано, что квантовая теория должна сосуществовать с новыми представлениями о том, что измерения квантовых систем должны представлять собой совместный процесс в "приборе плюс системе". Фактически это был шаг к осознанию того, что квантовые процессы являются нелокальными. Однако еще многие годы не прекращались попытки построения квантовых теорий со скрытыми параметрами. Случайная эволюция таких параметров, по мнению авторов теорий, должна была бы приводить к случайности результатов измерений.

Ситуация резко изменилась после основополагающей работы Белла, где было показано, что гипотеза о наличии скрытых параметров может быть представлена в виде некоторых неравенств. Нарушение таких неравенств означает невозможность введения скрытых параметров. Через некоторое время прямыми экспериментами было показано, что неравенства Белла нарушаются в полном соответствии с квантовой теорией. Эти результаты вызвали поток работ, теоретических и экспериментальных, в которых факт нелокальности квантовых процессов был многократно подтвержден и предложен для различного

рода экзотических приложений. К ним относятся квантовые криптография и телепортация, квантовые вычисления. Кратко они обсуждаются в разделах 27–29 (см. также комментарии).

## 21. Поведение микрочастицы

Любой предмет или живое существо при взаимодействии с окружающим миром проявляют только малую часть своих свойств или структурных возможностей. Обычный атомарный подход предполагает, что все эти внутренние свойства можно шаг за шагом исчерпать, т.е. полностью их объяснить, если узнать все свойства малых составных элементов объекта в их взаимодействии между собой. Идя по этому пути, мы естественно приходим к простейшему объекту, а именно, к малой частице, проявляющей только свою динамику, т.е. механические свойства.

В классической механике такой объект называется материальной точкой, т.е. телом очень малого размера, не имеющим никакой внутренней структуры. Все, чем обладает такая точка, — это ее масса, положение в пространстве и отклик на внешние силы в соответствии со вторым законом Ньютона. В одномерном случае — это

$$m\ddot{x}_0 = \dot{p}_0 = F. \quad (93)$$

Здесь  $x_0$  — координата точки,  $m$  — ее масса,  $p_0 = m\dot{x}_0$  — импульс,  $\dot{x}_0$  — скорость,  $\ddot{x}_0$  — ускорение,  $F$  — сила, действующая на точку. В случае потенциального поля сил  $F(x_0) = -\partial U/\partial x_0$ , где  $U(x_0)$  — потенциальная энергия. Такой подход к малой частице кажется абсолютно безупречным и самым точным. Однако он не всегда адекватно описывает взаимодействие такой частицы с внешним миром. Действительно, если эта частица помещена в термостат и с ней производятся очень медленные действия, типа изменения занимаемого ею объема или ее средней кинетической энергии, то более правильным становится ее термодинамическое описание в терминах термодинамических величин — температуры, объема, энтропии, внутренней и свободной энергий и т.д. Описание объекта должно точно соответствовать взаимодействию этого объекта с внешним окружением.

При термодинамическом описании нет нужды интересоваться мгновенным положением частицы в пространстве, а достаточно лишь знать ее усредненные характеристики. Естественно, что в этом случае описание проводится с неполной информацией о частице. Более общий подход к неполному описанию частицы основан на введении функции распределения  $f(x, v, t)$  для вероятности нахождения координаты

наты и скорости частицы соответственно вблизи  $x$  и  $v$ , так что величина  $f(x, v, t)\Delta x \cdot \Delta v$  соответствует вероятности попадания координаты в интервал  $\Delta x$ , а скорости — в интервал  $\Delta v$ . Эволюция функции  $f(x, v, t)$  определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (94)$$

Для малой частицы описание (94) кажется наиболее адекватным. Оно, естественно, охватывает оба предельных случая: в одном случае, когда распределение по скоростям и по координате успевает восстанавливаться к распределению Максвелла–Больцмана, получается термодинамический предел, а при

$$f_0 = \delta(x - x_0)\delta(v - v_0) \quad (95)$$

мы имеем дело с материальной точкой с координатами  $x_0(t)$ ,  $v_0(t)$ . В соотношении (95) формально стоят  $\delta$ -функции, равные всюду нулю, кроме точек, где их аргумент обращается в нуль. Для физических рассуждений удобно считать, что  $x$  и  $v$  являются не непрерывными величинами, а дискретными, так что пространство  $x, v$  разбито на очень малые ячейки размером  $\Delta x, \Delta v$ . Тогда функция (95) должна равняться величине  $(\Delta x \cdot \Delta v)^{-1}$  только в одной ячейке, а во всех остальных ячейках она обращается в нуль.

Если подставить функцию (95) в уравнение (94) и проинтегрировать его с весом  $x$ , а затем с весом  $v$ , то получится уравнение (93). Таким образом, описание движения частицы в терминах динамических переменных  $x, p = mv$  отвечает максимальной локализации (95). Будем считать, что координата  $x$  изменяется только в пределах ограниченного отрезка длиной  $L$ , а скорость ограничена сверху некоторым пределом  $c$ . Тогда полное число ячеек фазового пространства будет равно  $N = Lc(\Delta x \cdot \Delta v)^{-1}$ . Соответственно, функция (95) отвечает состоянию только с одной занятой ячейкой, т.е. с максимальной информацией  $I = \ln N$  и нулевой энтропией. Если выбирать более гладкие распределения, то соответствующие им значения энтропии будут тем больше, чем больше число занятых ячеек  $\Gamma$ :  $S = \ln \Gamma$ . Соответственно, информация будет уменьшаться:  $I = \ln N - \ln \Gamma$ . В пределе, когда частица заполнит равномерно весь интервал  $L$ , а распределение по скоростям станет максвелловским, энтропия достигнет своего максимального значения при заданной средней энергии. Соответственно, информацию такого состояния следует считать равной нулю, так что предельное значение скорости при заданной температуре  $T$  равно просто  $c \cong (T/m)^{1/2}$ .

Итак, описание с помощью функции распределения легко справляется с задачей перехода к термодинамическому пределу. Однако и у такого описания есть свой собственный, пока еще не очень заметный дефект, — оно относится только к малой частице макромира. Такая частица, по сути дела, находится в постоянном информационном "общении" с внешним миром, причем соответствующее информационное взаимодействие является настолько слабым, что оно никак не сказывается на ее динамике.

В самом деле, кинетическое описание допускает решение вида (95). С помощью кинетического уравнения (94) легко устанавливается, что  $x_0$ ,  $p_0$  удовлетворяют уравнению (93). Соответственно, это означает, что если координата  $x$  равнялась величине  $x_0(t)$  в момент времени  $t$  и величине  $x_0(t + \Delta t)$  в момент времени  $t + \Delta t$ , ее скорость определяется как  $(x_0(t + \Delta t) - x_0(t))/\Delta t$ . Другими словами, для измерения скорости требуется дважды измерить координату: в момент времени  $t + \Delta t$  и в момент времени  $t$ . Только будучи уверенным, что повторное измерение не нарушает состояния частицы при первом измерении, можно говорить о существовании скорости  $v_0$  и, соответственно, об импульсе  $p_0$ , который входит в уравнение динамики (93). Разумеется, измерение и взаимодействие частицы с прибором — это объективно протекающие процессы. Поэтому более правильным является утверждение, что уравнения динамики базируются на предположениях о том, что частица находится в постоянной информационной связи с внешним миром, и эта связь не нарушает динамических свойств частицы. Именно эти характеристики уместно связать с объектами макромира. Однако для частиц микромира, как показало открытие квантовой механики, исходные положения об одновременном существовании координаты и импульса частицы оказываются неверными.

В основе квантовой механики лежит совершенно новый подход к процессу измерения, точнее сказать, к информационному взаимодействию микрочастицы с предметами макромира. А именно, основной принцип квантовой теории состоит в том, что сам процесс измерения, который, казалось бы, может допускать предельно малый обмен энергией между частицей и прибором, тем не менее оказывает существенное влияние на динамику микрочастицы. Каждое измерение существенно меняет состояние микрочастицы, поэтому повторное измерение может относиться только к новому состоянию, а прежнее оказывается нарушенным самим измерением. Как же в этом случае описывать микрочастицу?

Первый вывод напрашивается сам собой. Если каждое измерение что-то разрушает, то закономерность можно уловить, только проводя много аналогичных экспериментов. Это значит, что каждое отдельное

измерение может давать несколько отличные от других результаты: события будут случайными, и только усредненные статистические результаты смогут выявлять закономерность. Но ведь то же самое имеет место и при описании с помощью функции распределения  $f(x, v, t)$ . В чем разница? Разница заключается в том, что макроскопическое описание допускает решение (95) с минимальной энтропией, которое основано на возможности повторных измерений без нарушения состояния частицы, а в микромире нарушение состояния происходит при любом измерении.

Условимся называть решение (95) с минимальной энтропией чистым классическим ансамблем: многократные измерения, проводимые над таким состоянием будут давать всегда один и тот же результат. Именно этот факт и соответствует утверждению  $S = 0$ . Но кроме чистого состояния (95) существуют состояния с  $S \neq 0$ . Мы их будем называть смешанными. Заметим, что любое смешанное состояние можно рассматривать как композицию чистых:

$$f(x, v, t) = \int c(x_0, v_0, t) f_0 dx_0 dv_0, \quad (96)$$

где  $c(x_0, v_0, t)$  — функция переменных  $x_0, v_0$ , совпадающая по виду с  $f(x, v, t)$ .

Но и квантовая частица может находиться в смешанном состоянии: это просто случайно выбранный представитель из статистического ансамбля с некоторым распределением вероятностей по отдельным состояниям, которые можно назвать чистыми. Частица в смешанном состоянии взаимодействует с внешним миром так, как будто не весь ее информационный потенциал принимает участие в таком взаимодействии. В пределе максимума энтропии и минимума информации для квантовой частицы также применимо термодинамическое описание в терминах температуры и энтропии.

Утверждение квантовой механики состоит в том, что даже в чистом квантовом состоянии частица при взаимодействии с макроприбором проявляет себя как случайный объект, требующий статистического описания. Постараемся понять, почему логика квантовой механики естественно приводит к волновому уравнению. Допустим, что у нас имеется прибор, который может измерять координату частицы. После каждого измерения состояние частицы разрушается, т.е. превращается в нечто такое, что либо не может быть чистым состоянием, либо переводится в другое чистое состояние, но явно отличающееся от исходного. Повторное измерение координаты чистого состояния не сможет дать результат, который имел бы прямое соответствие с первым измерением координаты. Поэтому самое естественное допу-

щение состоит в том, что измерения координаты будут давать некоторую статистическую закономерность. Пусть  $p_x(x)$  есть плотность вероятности для получения результата измерения координаты частицы в интервале  $(x, x + dx)$ .

Кроме координаты  $y$  частицы есть вторая динамическая характеристика — импульс  $p$ . Импульс  $p$  нельзя измерить прибором, измеряющим координату: если запрещены повторные измерения, не разрушающие состояния, то скорость частицы найти по результатам измерения ее координат нельзя. Следовательно, импульс нужно измерять другим прибором, например, по импульсу отдачи при отражении от зеркальной перегородки прибора, который может затем замерить импульс этой перегородки. Пусть  $p_p(p)$  есть вероятность обнаружения импульса частицы в интервале  $(p, p + dp)$ .

Итак, можно производить два несовместимых вида измерений: измерять либо координату частицы, либо ее импульс. Эти измерения могут производиться над одним и тем же состоянием частицы, но совершенно разными приборами. В каждом случае говорят о полном наборе измеряемых величин и, соответственно, о полном измерении.

Пусть состояние частицы эволюционирует во времени. Тогда получаемые приборами вероятности будут функциями времени:  $p_x = p_x(x, t)$ ,  $p_p = p_p(p, t)$ . Постараемся понять, что можно сказать об этих вероятностях с помощью логических и наглядных физических соображений. Чтобы не усложнять рассуждений, мы допустим, что частица движется свободно, т.е.  $U = 0$ . В этом случае энергия  $\varepsilon = p^2/2m$ , поэтому измерение функции распределения по импульсам автоматически дает функцию распределения по энергии.

Допустим, что мы создаем состояние с точно заданным импульсом  $p = p_0$  и точно заданной энергией  $\varepsilon_0 = p_0^2/2m$ . Такое состояние с точки зрения механики абсолютно стационарно во времени, и поэтому вероятность  $p_x$  никак не должна зависеть от времени. Но это означает автоматически, что  $p_x$  не должна зависеть от  $x$ , поскольку при равномерном смещении по  $x$  мы снова должны получить стационарное состояние.

Итак, стационарное состояние отвечает вероятностям:  $p_x = \text{const}$ ,  $p_p = \delta(p - p_0)$ . Рассмотрим теперь слабонестационарное состояние, когда  $p_x$  является медленно меняющейся функцией координаты  $x$  и времени  $t$ , а  $p_p(p)$  является узколокализованной функцией вблизи значения  $p = p_0$ .

Если ширина локализации частицы по  $x$  очень велика, то и прибору, измеряющему положение частицы, нет необходимости стремиться к очень точной локализации частицы: для обнаружения

медленного изменения  $p_x$  вдоль  $x$  масштаб  $\Delta x$  для измерения частицы может быть большим. Но тогда мы приходим к почти классической частице и естественно считать, что  $p_x(x, t)$  будет переноситься со скоростью частицы, которая близка к  $p_0/m$ :  $p_x \cong p_x(x - p_0 t m^{-1})$ . Таким образом, мы получаем аналог соотношения (95) с той лишь разницей, что масштаб локализации по  $x$  достаточно велик и вероятности  $p_x, p_p$  относятся к показаниям разных приборов, так что их нельзя объединить в одно произведение (95).

По аналогии с выражением (95) допустим, что существует такая функция  $W(x, p)$ , которая при интегрировании по  $p$  или  $x$  дает, соответственно, выражения  $p_x(x)$  или  $p_p(p)$ :

$$p_x(x) = \int W(x, p) dp, \quad p_p(p) = \int W(x, p) dx. \quad (97)$$

Функция  $W(x, p)$  называется функцией Вигнера. В классическом случае  $W(x, p)$  должна совпадать с функцией распределения по  $x$  и  $p$ , но в квантовом случае это не так, поскольку измерения значений  $x$  и  $p$  производятся разными приборами. Соответственно,  $W(x, p)$  не обязательно должна быть знакоположительной и даже действительной функцией. Кроме того, функция Вигнера может не распадаться на произведение функции только от  $x$  и функции только от  $p$ . И, наконец, для случая плавного распределения  $p_x(x)$  по  $x$  функцию  $W(x, p)$  можно считать близкой к  $W(x - pt m^{-1}, p)$  с зависимостью от второго аргумента, сильно локализованной вблизи  $p = p_0$ . Пока все это не противоречит классическому распределению вероятностей. Для того чтобы произошел переход к квантовому описанию, должна появиться величина с размерностью длины, которая указывала бы, на каких масштабах длины появляется новая физика. Но оказалось, что такой универсальной величины с размерностью длины нет. Зато была найдена универсальная величина  $\hbar$  — константа Планка с размерностью действия.

С помощью  $\hbar$  и  $p$  можно попытаться искать минимальную длину. Например, мы могли бы связать такую длину с величиной  $\hbar/p$  и, соответственно, импульс с обратной длиной. Математически более естественно считать, что импульс пропорционален производной  $\hbar \partial/\partial x$ . Однако среднее значение производной  $\partial/\partial x$  при любом распределении  $p_x(x)$  обращается в нуль. Поэтому эта производная должна действовать не на вероятность, а на что-то другое, например, на какую-то новую величину типа фазы волны в волновом пакете. По аналогии с классическими волновыми полями приходится вводить волновую функцию  $\psi$ . Более точно, если  $\psi_k(x) = \exp(ikx)$ , то  $p$



определяется как

$$p\psi_k = -i\hbar \frac{\partial \psi_k}{\partial x} = \hbar k \psi_k.$$

Таким образом, для плоской волны импульс  $p = \hbar k$ , где  $k$  — волновое число, а постоянная Планка  $\hbar$  указывает на то, что у одной единственной частицы импульс  $p$  при заданном значении волнового числа  $k$  не может быть сколь угодно мал, а ограничен снизу квантом действия.

Функция  $\psi$  должна быть каким-то образом связана с вероятностями  $W(x, p)$ ,  $p_x(x)$ ,  $p_p(p)$ . Допустим, что  $\psi$  зависит также от времени, скажем, по закону

$$\psi_k(x, t) = \exp(-i\omega t + ikx).$$

Частота  $\omega$  скорее всего должна зависеть от волнового числа, т.е.  $\omega = \omega_k = \omega_k(k)$ . Если это так, то путем суперпозиции функций  $\psi_k$  можно строить волновые пакеты, распространяющиеся с групповой скоростью. Именно такие пакеты с набором волновых чисел вблизи определенного значения  $k = k_0 = p_0/\hbar$  и соответствуют вероятности  $p_k \cong p_x(x - p_0 t m^{-1})$  для очень широкого распределения плотности вероятности  $p_x$  по оси  $x$ . Зная, что у волнового пакета  $p_0/m = v_\Gamma = \partial\omega_k/\partial k$ , и учитывая, что  $p_0 = \hbar k$ , мы сразу находим закон дисперсии:  $\omega_k = \hbar k^2/2m$ . Вспоминая, как устроены классические волновые пакеты, мы, естественно, приходим к соотношению

$$p_x(x, t) = \psi^*(x, t)\psi(x, t) = |\psi(x, t)|^2. \quad (98)$$

Далее, можно замкнуть соотношения (97), считая, что функция Вигнера равна

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \psi^*(x)\psi(x') \exp\left[\frac{ip}{\hbar}(x - x')\right] dx'. \quad (99)$$

Другими словами,  $W(x, p)$  соответствует фурье-преобразованию матрицы плотности  $\psi^*(x)\psi(x')$  по одной из координат, а вероятность  $p_p(p)$  равна модулю квадрата амплитуды в фурье-разложении  $\psi(x)$  по гармоникам вида  $\exp(ikx)$ , где  $x = p/\hbar$ .

Итак, логика информационного взаимодействия микрочастицы с макроприбором в предположении разрушения состояния при измерении и существования кванта действия  $\hbar$  неумолимо приводит к волновой механике, затем к уравнению Шрёдингера и вероятностному истолкованию  $\psi$ .

## 22. Восприятие

Измерение в квантовой механике — это сугубо необратимый информационный процесс, и для его описания нам понадобятся некоторые вспомогательные рассуждения и построения. Напомним еще раз, что для информационных процессов важна не столько энергетическая (которая тоже необходима), сколько содержательно-смысловая сторона передаваемых или принимаемых сигналов. Динамика — это обмен импульсом и энергией, информатика же — это обмен символами между партнерами, участвующими в процессе информационного взаимодействия.

Здесь мы обсудим информационный аспект процесса измерения, который можно назвать детектированием или восприятием сигналов, подготовленных анализатором. Непосредственно с измеряемым объектом  $U$  (unity) взаимодействует именно анализатор  $A$ , который может находиться в одном из состояний  $a_i$ . Мы будем для простоты считать, что все эти состояния эквивалентны между собой и связаны с объектом измерения таким образом, что все  $a_i$  равновероятны. Пусть полное число состояний  $a_i$  равно  $N$ . Тогда вероятность любого из этих состояний равна  $1/N$ . Измерение считается выполненным, если состояние  $a_i$  зарегистрировано детектором-получателем информации. Далее эта информация может быть воспринята. В этом разделе мы обсудим именно само восприятие.

Будем считать, что детектор состоит из двух частей — получателя информации  $P$  (perceptor) и питающей системы  $F$  (feeder), которая осуществляет информационную подпитку системы  $P$ . Пусть  $P$  и  $F$  также содержат ровно по  $N$  элементов. Допустим, что до получения информации система  $P$  является чистой, т.е. лишенной какой-либо начальной информации.

Систему без информации можно представлять себе в двух вариантах: либо это просто набор  $N$  чистых ячеек, либо у этих ячеек быстро и хаотически меняются состояния, скажем, от нуля к единице и обратно. В первом случае мы имеем дело просто с памятью  $M$  (memory), к рассмотрению которой нам также придется прибегать в дальнейшем. А во втором случае мы имеем как бы термостат с чисто тепловым движением или его хаотическим аналогом. Поэтому мы будем обозначать его буквой  $C$  (capicity). В случае  $M$  мы имеем систему с равными нулю как информацией, так и энтропией, а в случае  $C$  в исходном состоянии информация равна нулю, а энтропия достигает максимального значения  $S = \ln N$ . В данном разделе мы рассматриваем чисто физические процессы с возможностью обмена информацией с внешним миром, и поэтому для наших рассуждений большее

удобство представляет исходно стохастизированная система с нулевой информацией и максимальной энтропией, т.е. система типа  $C$ .

Рассмотрим теперь систему  $F$ , которая может служить источником информационной подпитки рецептора  $P$  в состоянии  $C$ . Будем считать, что  $F$  также состоит из  $N$  ячеек, но имеет только одну заполненную или возбужденную ячейку. Энтропия  $F$  равна нулю, а информация  $I = \ln N$ .

Рассмотрим, далее, модель восприятия для чисто классического случая, когда выпадение случайного значения измеряемой величины никак не связано с процессом измерения. Пусть система  $U$  имеет  $N$  состояний  $u_i$ , которые могут реализовываться с равной вероятностью  $1/N$ . Будем считать, что между состояниями измеряемого объекта  $u_i$  и состояниями анализатора  $a_i$  имеется взаимно однозначное соответствие, так что выпадение  $u_i$  немедленно влечет за собой событие  $a_i$ .

Таким образом, в классическом случае мы имеем как бы одно событие  $(u_i, a_i)$ . Например, изменение направления ветра  $u_i$  меняет направление флюгера  $a_i$ , и если эти направления будут впоследствии наблюдаться каждый час, то можно получить цепочку случайных событий  $(u_i, a_i)$ . Но эти события пока не восприняты и не "поняты". Чтобы произошло восприятие, должен протечь необратимый процесс записи факта  $a_i$  где-то в регистрирующем приборе. Такая запись может быть организована следующим образом (рис. 1).

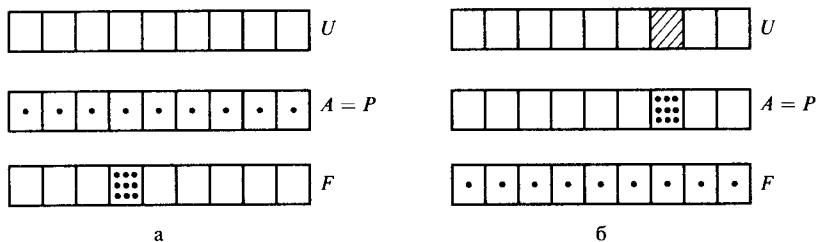


Рис. 1. Восприятие осуществляется при переходе из состояния (а) в состояние (б). В ответ на событие  $u_i$  в наблюдаемом объекте  $U$  анализатор  $A$  фиксирует событие  $a_i$  за счет начального запаса информации в питающей системе  $F$ .

После того, как в системе  $U$  произошло событие  $u_i$ , анализатор, пробегаая последовательно ячейки  $U$  и обнаруживая факт  $u_i$ , откликается на  $u_i$  событием  $a_i$  за счет запаса информации в питающей системе  $F$ . Эта система устроена почти так же, как и анализатор  $A$ , но находится в состоянии максимального порядка, когда только одна из ячеек заполнена, а остальные ячейки пусты. Исходная информация события  $u_i$ , например выпадения одной из граней кубика, равняется

$\ln N$ , где  $N$  — число ячеек  $U$ . Анализатор  $A$  откликается на это тем, что в соответствующей  $i_i$  ячейке  $a_i$  появляется сигнал. При этом информация системы  $A$  скачком увеличивается от нуля до  $\ln N$ , а энтропия падает от начального значения  $\ln N$  до нуля. В соответствии со вторым началом термодинамики такое падение энтропии возможно только за счет хаотизации системы питания  $F$ , энтропия которой возрастает от нуля до  $\ln N$ .

Обратим внимание на то, что при взаимодействии систем  $A$  и  $F$  полная энтропия сохраняется. Это означает, что процесс передачи информации от  $F$  к  $A$  является полностью обратимым: от состояния систем  $A, F$  на рис. 1б можно вернуться к состоянию  $A, F$  на рис. 1а без нарушения второго начала термодинамики. Поэтому на этом этапе появление сигнала  $a_i$  в анализаторе не носит еще характера необратимой записи информации.

Но нужно иметь в виду, что практически такой идеальный прибор осуществить трудно в силу естественных внешних помех. Поэтому более реальное устройство для детектирования сигнала должно выглядеть так, как изображено на рис. 2.

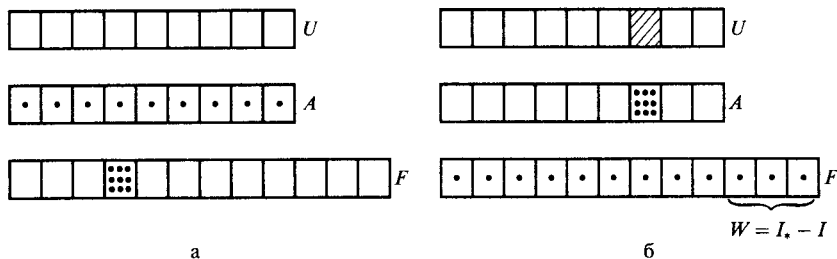


Рис. 2. Запись события  $u_i$  в анализаторе  $A$  при неполном использовании информации  $I_*$  питателя  $F$ : избыточная информация  $W = I_* - I$  теряется из-за диссипации в окружении.

Если за счет необратимых процессов часть информации питателя  $F$  может быть потеряна, то нужно "подкормить" и расширить сам питатель, т.е. следует увеличить его запас информации. Это можно сделать путем увеличения числа  $N_*$  его ячеек, так что  $N_* > N$  и  $I_* > I$ . Теперь в процессе записи информации, находящейся в  $A$ , часть запаса информации  $I_*$  может быть потеряна, т.е. разрушена из-за диссипативных взаимодействий с окружающей средой. При этом информация  $W = I_* - I = \ln(N_*/N)$  отдается внешней среде в виде потерь (waste). Можно сказать, что взаимодействие с равновесной средой приводит к

увеличению энтропии системы  $A + F$  на величину  $W$ . Введем величину  $\eta_I = I/I_* \leq 1$ , которую естественно назвать информационным КПД или информационной эффективностью. Ясно, что все реально протекающие процессы имеют КПД  $\eta_I < 1$ .

Если  $\eta_I < 1$ , то процесс регистрации сигнала  $a_i$  становится необратимым: просто так вернуться от рис. 2б к рис. 2а уже нельзя. Поэтому мы можем сказать, что теперь сигнал  $a_i$  "воспринят", или "записан". Нетрудно видеть, что кроме анализатора  $A$ , изображенного на рис. 2, можно представить себе еще один или даже несколько аналогичных анализаторов. Все они, разумеется, "увидят" один и тот же сигнал  $u_i$ . Пусть, например,  $U$  — это кубик с занумерованными гранями, а событие  $u_i$  — случайное выпадение одной из граней. Анализаторы типа  $A$  — это игроки, следящие за тем, какая грань кубика окажется сверху. Зарегистрированные ими события  $a_i$  — это то, что они увидели и отметили в своей памяти.

Игроки могут захотеть бросить кубик повторно. Но перед этим они должны подготовиться к восприятию результата нового бросания. Для этого следует "очистить" анализатор  $A$  от сигнала (рис. 2б), перебрасывая запись сигнала в другую систему памяти точно таким же процессом, как из сигнала  $u_i$  был получен сигнал  $a_i$ . Кроме того, нужно "запитать" информацией питатель  $F$ . Для этого можно воспользоваться точно таким же процессом, каким  $F$  "запитывал"  $A$ , а именно, нам следует иметь питатель  $F'$  с информацией  $I_{**} > I_*$ , и затем с эффективностью  $\eta_I = I_*/I_{**} < 1$  мы можем перевести  $F$  в состояние на рис. 2а. Другими словами, чтобы бросать кубик и воспринимать результаты этих событий, нужно "питаться" информацией откуда-то извне.

Информационный процесс на рис. 2 включает в себя два необратимых процесса: само событие  $u_i$  и регистрацию события  $a_i$  с помощью  $F$  и с потерей информации  $I_* - I$ , т.е. с возрастанием энтропии объединенной системы  $A = F$ . Событие  $u_i$  приходит извне и может быть либо чисто случайным, либо представителем вполне регулярной последовательности. Что же касается процесса в системе  $A + F$ , то это типично необратимый процесс с возрастанием энтропии и потерей информации  $W$ . Случайность или неслучайность цепочки последовательных актов восприятия целиком определяется входом, т.е. наличием или отсутствием регулярности в последовательности событий  $u_i$ .

Допустим теперь, что объект  $U$  является не классическим, а квантовым. Тогда ячейки на рис. 2а отвечают собственным функциям полного базиса, а сам объект  $U$  представляет собой суперпозицию этих собственных функций. Анализатору  $A$  не остается ничего другого, как

тоже быть квантовым объектом, так что его ячейки, соответствующие условным показаниям стрелки прибора, также являются собственными векторами, коррелированными с  $U$ . Собственно измерение происходит, когда в игру вмешивается необратимая система  $F$ , связанная с внешним миром. Именно она и совершает необратимый процесс "измерения", соответствующий переходу от рис. 2а к рис. 2б. При этом система  $F$  увеличивает свою энтропию, а системы  $U$  и  $A$  одновременно коллапсируют в  $u_i, a_i$ . Через систему  $F$  квантовые системы  $U, A$  приходят в соприкосновение с внешним классическим миром. Это соприкосновение разрушает когерентность исходных состояний систем  $U, A$  и сразу же коллапсирует их в  $u_i, a_i$ . При многократном проведении однотипных измерений, коллапс будет случайно приходиться то на одну, то на другую ячейку, так что усредненная по многим измерениям картина приобретет характер смешанного состояния, описываемого статистически, например, с помощью матрицы плотности.

Итак, именно система  $F$  служит границей между квантовым и классическим миром. В интервале времени между измерениями квантовое описание выражается через эволюцию волновой функции  $\psi$  чистого состояния или матрицу плотности  $\rho$  смешанного состояния.

Приведенные рассуждения являются довольно общими и пока еще не дают прямого рецепта для описания реальной связи и взаимодействия между квантовым микромиром и классическим макромиром. Чтобы перейти к этому описанию, нам следует познакомиться с еще одним очень важным явлением — флуктуациями. Но перед этим хотелось бы сделать одно общее замечание.

Сложные физические объекты могут быть описаны с разной степенью подробности, и не только потому, что точное описание требует больших усилий или большего объема компьютерных расчетов. Весь наш опыт показывает, что при взаимодействии с внешним миром физические объекты никогда не раскрывают весь свой внутренний потенциал сложности. Соответственно, неполное или даже феноменологическое описание физических явлений или физических объектов иногда лучше отвечает и сути дела, и пониманию того, что происходит. В особенности, это относится к коллективным явлениям, когда огромное количество частиц оказывается вовлеченным в общекolleктивное движение. Так, например, газодинамика лучше и более адекватно описывает ветровые потоки, чем просто молекулярная динамика. Точно так же процессы, связанные с тепловым движением атомов, лучше и более доступно для понимания описываются термодинамикой и статистической физикой. Можно сказать и по-другому: существуют физические явления, для которых неполное

описание с пренебрежением излишних деталей является более адекватным и даже лучше отражает суть описываемых процессов.

В частности, статистическое описание с введением вероятностей и усреднением по распределениям вероятностей лучше соответствует описанию объектов, составленных из очень большого числа атомов. Если число атомов уменьшать, то на фоне вероятностного описания, которое не теряет своего усредненного по многим однотипным процессам смысла, начинают выступать и играть все бóльшую роль индивидуальные процессы. Их можно назвать флуктуациями, и далее можно довольно произвольно выбирать степень детализации их описания. Например, движение броуновской частицы можно описывать как диффузию. А можно, повторяя часто измерения, описывать это движение как случайную марковскую цепь. В пределе, следя за частицей через очень малые промежутки времени, мы можем говорить об очень сложной траектории такой частицы. В любом случае, в применении к классической частице у нас не возникает сомнений в возможности сколь угодно точного описания. Однако для квантовой частицы это не так: наблюдение сопровождается взаимодействием с макромиром, и это взаимодействие не может быть сколь угодно малым. Чтобы найти пути к более полному пониманию соответствующих эффектов, целесообразно сначала познакомиться с флуктуациями.

## 23. Флуктуации и необратимость

Термодинамические соотношения, которыми мы пользовались в разделах 2–5, относятся только к усредненным величинам. Это усреднение в реальных физических условиях может происходить как бы само собой, за счет медленности протекающих процессов. Соответственно, и усреднение формально должно производиться только по времени. В статистической физике показывается, что в случае большого числа частиц соответствующее усреднение может производиться не только по времени, но и по фазовому пространству, что в конце концов приводит к каноническому распределению. Однако дискретность, т.е. атомарная структура вещества, полностью не исчезает и проявляется во флуктуациях — малых отклонениях от статистического равновесия. В данном разделе мы познакомимся с простейшими примерами флуктуаций и обсудим их связь с необратимостью.

Рассмотрим опять идеальный газ. Пусть  $N$  невзаимодействующих классических частиц находятся в объеме  $V$ . Тогда средняя плотность частиц определяется соотношением  $n = N/V$ . Тепловое движение частиц приведет к тому, что число частиц в некотором заданном

малом объеме  $V_0$  не будет точно равно  $N_0 = NV_0$ , а будет флуктуировать около этого значения. Соответствующие флуктуации находятся очень просто. Пусть сумма по всем частицам вида

$$n_\mu(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (100)$$

представляет собой реальную микроскопическую плотность частиц в точке  $\mathbf{r}$ . Здесь  $\delta$ -функция вида  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  локализована в точке нахождения частицы номера " $i$ ". Теперь мы можем положить  $n_\mu = n + \delta n$ , где  $n$  — это средняя плотность, а величина

$$\delta n(\mathbf{r}) = n_\mu - n = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - n. \quad (101)$$

Функция  $\delta n(\mathbf{r})$  представляет собой набор "пиков" на фоне отрицательного однородного значения ( $-n$ ). Среднее значение  $\langle \delta n \rangle = 0$ . Чтобы найти величину флуктуаций, вводят обычно корреляционную функцию  $\langle \delta n(\mathbf{r}) \cdot \delta n(\mathbf{r}') \rangle$ . С помощью (101) формально находим

$$\begin{aligned} \langle \delta n(\mathbf{r}) \cdot \delta n(\mathbf{r}') \rangle &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \sum_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \right\rangle + \\ &+ \sum_{i \neq j} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \rangle - n^2. \end{aligned} \quad (102)$$

Здесь в первом слагаемом мы оставили только члены с одинаковыми индексами  $i, j$  и положили  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$ , а во втором слагаемом мы сохранили лишь члены с  $i \neq j$ . Легко видеть, что полученное соотношение может быть представлено в виде

$$\langle \delta n(\mathbf{r}) \cdot \delta n(\mathbf{r}') \rangle = n \left[ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{V} \right]. \quad (103)$$

С помощью этого соотношения легко найти флуктуацию числа частиц в малом объеме  $V_0$ . Для этого его нужно проинтегрировать дважды по  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  в объеме  $V_0$ . В результате получаем для отклонения  $\delta N_0$  от среднего значения  $N_0 = V_0 n$

$$\langle \delta N_0^2 \rangle = N_0 \left( 1 - \frac{V_0}{V} \right). \quad (104)$$

При  $V_0 \ll V$  отсюда следует хорошо известное соотношение  $\delta N_0 = N_0^{1/2}$ , а при  $V_0 = V$  получаем естественный результат, что полное число частиц во всем объеме  $V$  не флуктурует. Относитель-



ные флуктуации плотности становятся особенно большими, когда в объеме  $V$  находится лишь одна частица:  $N = 1$ ,  $n = 1/V$ .

Легко проверить, что соотношение (104) сохраняет свой вид и для одной частицы, так что для флуктуации "числа частиц" в объеме  $V_0$  получаем соотношение

$$\langle \delta N_0^2 \rangle^0 = \frac{V_0(V - V_0)}{V^2}. \quad (105)$$

Это соотношение абсолютно симметрично по отношению к внутреннему,  $V_0$ , и внешнему,  $(V - V_0)$ , объемам. При  $V_0 \rightarrow 0$  и  $V_0 \rightarrow V$  флуктуации исчезают. А при малом значении  $V_0$  по сравнению с  $V$  имеем  $\langle \delta N_0^2 \rangle = V_0/V$ . Это соотношение имеет очевидный физический смысл:  $V_0/V$  — это просто та доля времени, когда внутри объема  $V_0$  находится точно одна частица, так что  $\langle \delta N_0^2 \rangle$  равняется единице, умноженной на вероятность попадания частицы в объем  $V_0$ . Мы видим, что для одной частицы квадрат флуктуации числа частиц  $\langle \delta N_0^2 \rangle$  равен среднему числу частиц  $N_0 = V_0/V$  в объеме  $V_0$ . Другими словами, флуктуации очень велики, и поэтому они могут существенно повлиять на логику некоторых наших предыдущих рассуждений.

Вернемся опять к рассмотренному в разделе 3 процессу получения работы за счет тепловой энергии одной единственной частицы с использованием демона Максвелла, т.е. измерения положения или скорости частицы. Для простоты опять начнем с одномерного случая, считая, что частица находится в термостате с двумя торцами, расположенными на расстоянии  $L$  друг от друга по оси  $x$ . Сталкиваясь с торцами, частица в среднем поддерживает максвелловское распределение по скоростям с температурой  $T$ . Если эффективная масса  $M$  звуковой волны, создаваемой ударом частицы в торце, значительно превышает массу  $m$  рассматриваемой частицы, то при каждом столкновении с торцом абсолютная скорость частицы изменяется только на малую  $\sim m/M$  долю своей величины. Малость величины  $m/M$  достигается за счет того, что фононы в веществе из тяжелых атомов также являются "тяжелыми" и медленными. При  $m/M \ll 1$  атому придется испытать много столкновений, чтобы восстановить любое нарушение максвелловского распределения. Процесс релаксации в этом случае сходен со случайными блужданиями, описываемыми уравнением Ланжевена. За много столкновений максвелловское распределение обязательно будет восстановлено, и этот процесс нетрудно описать в терминах броуновского движения по импульсам.

Для нас удобен более простой случай, когда  $m = M$ . При этом приближенно можно считать, что одного лишь удара достаточно для достижения максвелловского распределения в отлетающих от стенки

частицах, независимо от того, с какой скоростью частицы подлетели к стенке. Итак, допустим, что одна частица с максвелловским распределением по скоростям заполняет весь термостат длиной  $L$ . Начнем теперь наш мысленный эксперимент по совершению работы. Пусть некоторый детектор зафиксировал факт удара частиц о торец и вслед за этим за время, меньшее  $b/v_T$ , на расстоянии  $b$  от торца вставляется перегородка, запирающая частицу в малом отсеке. Медленно сдвигая перегородку в направлении второго торца, можно совершать над ней отрицательную работу  $W$  за счет тепловой энергии частицы, равной  $T/2$  в случае теплового равновесия.

Кажется, что в этой схеме эксперимента возникает угроза для второго закона термодинамики. В самом деле, фиксируя удар частицы о стенку, мы получаем только один бит информации, поскольку на фоне многих промежутков времени, когда не было ударов и не было поступления новой информации, вдруг лишь один промежуток оказался с сигналом "удар". А это ровно один бит информации. Соответственно, на "усвоение" этой информации с последующим приведением в действие перегородки приходится увеличить внешнюю энтропию  $S_e$  на величину  $\ln 2$ . А вот выигрыш в работе, кажется, может быть гораздо больше: ведь начальный объем  $b$  можно расширить до величины  $L$ , которая может быть гораздо больше  $L$ . Соответственно, и энтропия возрастет на величину  $\ln(L/b) \gg 1$ . Однако не будем спешить с выводами. Оказывается, что для правильности рассуждений нужно учесть наличие флуктуаций.

Начнем с некоторого общего замечания. В статистической физике доказана знаменитая флуктуационно-диссипационная теорема, смысл которой заключается в следующем: механизм любой диссипации является одновременно и механизмом рождения флуктуаций. Именно за счет этого баланса флуктуации никогда не вымирают, а поддерживаются на том уровне, который диктуется дискретностью, т.е. атомарной природой вещества.

В нашем случае диссипация, т.е. максвеллизация вероятности распределения частицы по скоростям, создается при столкновениях с теплыми торцами. Вместе с тем именно столкновения с торцами и служат источником поддержания флуктуаций. Рассмотрим этот процесс несколько подробнее.

Допустим сначала, что у нас имеется облако из многих, скажем,  $N \gg 1$  частиц. Пусть  $f(x, v, t)$  — функция распределения этих частиц по координате  $x$  и скорости  $v$ . Если это облако налетает на зеркальную стенку, то оно отражается без искажения, и, соответственно, никаких необратимых процессов не происходит. Но если эта стенка является "теплой", то отражение каждого атома является неупругим, и после

многих повторных отражений функция распределения будет приближаться к максвелловской функции. Диссипация, казалось бы, будет "рассасывать" и размывать все малые возмущения, в том числе и те, которые были связаны с атомарным строением облака. Но это, разумеется, не так: микроскопическая функция распределения  $f_\mu$  будет всегда иметь вид

$$f_\mu = \sum_i \delta(x - x_i) \delta(v - v_i), \quad (106)$$

где координаты частиц  $x_i$ ,  $v_i$  подчиняются микроскопическим уравнениям динамики и тем самым отвечают наиболее полному описанию движения частиц. Соответственно, и флуктуации типа (102) должны сохраняться. Возрождение флуктуаций можно описать как случайный процесс, при котором из падающего потока с гладкой функцией распределения как бы изымается одна частица, а в обратном потоке появляется частица с некоторыми определенными значениями  $x_i$ ,  $v_i$ , подчиняющимися в среднем статистике неупругого отражения. Таким образом, неупруго отражающая стенка осуществляет одновременно механизмы рассасывания флуктуаций и рождения новых флуктуаций случайной "инъекцией" частиц с одновременным изъятием их из усредненной функции распределения.

Если частиц много, то и сами флуктуации малы, а механизм их возрождения является слабо возмущающим воздействием на усредненное распределение.

Рассмотрим теперь, что происходит при  $N = 1$ . Пусть по направлению к стенке летит "облако" плотности вероятности  $p(x, v, t)$ . Где-то внутри него "спрятана" одна единственная частица. За время  $\Delta t$  на поверхность стенки налетает слой  $\Delta x = v \Delta t$  этого облака. Толщина этого слоя пропорциональна текущей скорости  $v$ . Если мы интересуемся только вероятностью  $p(x, v, t)$ , то в нашей модели мы должны взять "долю"  $\int p(x, v, t) v \Delta t \cdot dv$ , относящуюся к вероятности нахождения частицы в данном слое, и превратить ее в максвелловское распределение с "отражением" от стенки. Если на стенку налетало максвелловское распределение, то и от стенки отлетит то же самое максвелловское распределение.

Совсем другой язык описания следует использовать, если мы хотим подробно проследить за флуктуациями. Во всем "облаке"  $p(x, v, t)$  находится только одна частица, хотя и не известно, где она расположена. Нетрудно видеть, что неупругое соударение частицы со стенкой можно рассматривать как случайное событие, которое мгновенно уничтожает априорную вероятность  $p(x, v, t)$ , превращая ее в  $\delta$ -функцию типа  $\delta(v - v_0) \delta(x - v_0 t)$ , где  $v_0$  — скорость после соударения

в момент времени  $t = 0$  в точке  $x = 0$ . Происходит коллапс, т.е. схлопывание протяженного облака вероятностей  $p(x, v, t)$  в узко локализованную  $\delta$ -функцию. Повторные столкновения частицы с торцом осуществляют тот же самый процесс: налетающая априорная вероятность в какой-то момент времени исчезает, а частица с приписанной к ней  $\delta$ -функциональной плотностью вероятностей отлетает от стенки.

Если в облаке имеется много, скажем,  $N$  частиц с одним и тем же распределением  $p(x, v, t)$ , то  $Np(x, v, t) = f(x, v, t)$ , и каждое столкновение "выхватывает" только одну частицу, так что функция распределения "мгновенно" трансформируется из  $Np(x, v, t)$  в  $(N - 1)p(x, v, t) + \delta(v - v_0)\delta(x - v_0t)$ . При  $N \gg 1$  случайный процесс создания флуктуаций не очень сильно нарушает исходное максвелловское распределение. Флуктуации в этом случае происходят по закону  $N^{1/2}$  и при больших  $N$  становятся относительно малыми.

А для одиночной частицы флуктуации очень велики: они превращают движение частицы в классическое перелетание от одного торца к другому со случайным изменением скорости после каждого удара. Тем не менее кажется очевидным, что при очень медленном перемещении заслонки-поршня, когда столкновения можно считать очень частыми, усредненное по времени распределение частиц по скоростям можно считать максвелловским. Оказывается, однако, что и это совсем не так, поскольку существуют флуктуации.

Пусть перегородка, расположенная в начальный момент на расстоянии " $b$ " от левого торца и отгородившая частицу от остального объема размером  $L \gg b$ , начинает медленно двигаться с постоянной скоростью  $\epsilon v_T$ , где  $\epsilon \ll 1$  — очень малое число,  $v_T = (T/m)^{1/2}$  — средняя тепловая скорость. Частица в малом отсеке будет, в основном, максвеллизирована, так что над перегородкой будет совершаться работа с мощностью

$$P = -\dot{W} = \frac{T}{b} \dot{x} = \epsilon v_T \frac{T}{b},$$

поскольку среднее давление частицы на стенку равно  $T/b$ . Однако существует малая вероятность того, что после отскока от теплой стенки ее скорость будет меньше  $\epsilon v_T$ . Такая частица никогда не догонит движущуюся перегородку, и, стало быть, с вероятностью масштаба  $\epsilon$  давление на перегородке может неожиданно упасть до нуля и никогда больше не восстановиться. В среднем это происходит за  $1/\epsilon$  ударов о стенку, и так как среднее время между соударениями имеет порядок величины  $b/v_T$ , то до исчезновения давления перегородка успевает сместиться на расстояние  $\Delta x = \epsilon v_T (b/v_T)/\epsilon \cong b$ . Дру-

гими словами, при совершении работы мы можем только удвоить длину отсека с частицей, а затем давление на поршень неожиданно исчезает и дополнительную работу совершить уже нельзя. Энтропию частицы при этом удастся увеличить только на один бит, т.е. ровно настолько, насколько увеличилась энтропия окружения при первоначальном измерении удара частицы о стенку. Чтобы совершить дальнейшую работу, можно остановить перегородку и подождать, пока частица догонит перегородку, а затем восстановит свое максвелловское распределение. Измерив факт хотя бы одного "полновесного" столкновения с перегородкой, можно снова расширять объем с частицей. Но на это измерение следует затратить информацию, т.е. увеличить энтропию окружения на один бит. За счет последующего расширения объема опять удастся увеличить энтропию частицы только на один бит, расширяя объем вдвое до следующего исчезновения давления на поршне. Итак, демону Максвелла снова приходится считаться со вторым началом термодинамики.

Заметим, что если вместо одной частицы мы имеем  $N$  частиц и эти частицы не взаимодействуют между собой, то эффект исчезновения давления при перемещении перегородки будет приложим к каждой частице в отдельности, так что в среднем давление исчезнет при удвоении объема даже при  $N \gg 1$ .

На первый взгляд кажется, что наш пример слишком искусственен и что можно найти условия, при которых одним измерением удара о торец можно отгородить частицу на расстоянии " $b$ " от торца, а затем, расширяя объем до полной длины  $L$ , увеличить энтропию частицы на величину  $\ln(L/b)$  и совершить соответствующую работу за счет тепловой энергии. Однако это не так. Рассмотрим, например, более реалистичный случай, когда частица находится в цилиндрическом термостате радиуса  $a$ . Тогда максвелловское распределение может устанавливаться за счет столкновений с боковыми стенками, так что появление медленного продольного движения частицы со скоростью, меньшей скорости поршня, большой роли не играет: частица сможет быстро восстановить продольную скорость за счет максвеллизации распределения боковыми стенками.

Пусть  $v_* = v_T/a$  есть средняя частота столкновений частицы с боковыми стенками. Удобно рассмотреть предельный случай  $b \gg a$ ; тогда именно  $v_*$  будет определять темп восстановления максвелловского распределения. Казалось бы, при малой скорости расширения  $\dot{x} = \varepsilon v_T$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , проблемы восстановления максвелловского распределения не возникнет и давление на поршне будет в среднем все время равно  $T/b$ . Но это не так: в игру вступают эффекты диффузии. Дело в том, что при каждом столкновении с боковой стенкой происходит

случайное изменение как поперечной, так и продольной компонент скорости. Поэтому перемещение частицы в продольном направлении принимает характер случайных блужданий с коэффициентом диффузии  $D = v_* a^2 = v_T a$ . Участок сосуда длиной "b" такая частица заполняет за время  $t = b^2/D$ , так что скорость перемещения перегородки не должна превышать величины  $\dot{x} = b/t = D/b = v_T a/b$ , чтобы распределение вероятности по  $x$  "не отрывалось" от движущейся перегородки. Но и этого еще мало. При каждом ударе о боковую стенку происходит локализация функции распределения частицы вблизи точки удара, а затем это локализованное облако долго блуждает вдоль оси  $x$ . Время  $t \sim b^2/D$  — это время блуждания внутри отсека шириной  $b$  от одного торца до другого, так что средняя частота столкновений с перегородкой будет порядка

$$\nu = \frac{1}{t} = \frac{D}{b^2} = \frac{v_T a}{b} \frac{1}{b}.$$

Эта величина при  $a/b \ll 1$  гораздо меньше средней частоты столкновений  $v_T/b$  для свободно движущейся частицы. Таким образом, в узкой трубке работа, совершаемая частицей над поршнем, оказывается существенно меньше, и большая скорость максвеллизации ничуть не помогает, но даже мешает совершению работы.

Итак, флуктуации играют большую роль, в особенности, если речь идет об одной частице. Подчеркнем, что флуктуации можно рассматривать как составную часть необратимого процесса: диссипация рассасывает последствия флуктуативного поведения, но вместе с тем рождает новые флуктуации. В частности, процесс максвеллизации частицы на теплой стенке можно рассматривать как случайно повторяющийся процесс уничтожения плотности вероятности, текущей к стенке, и рождения узко локализованного по  $x$  и  $v$  состояния: это типичный коллапс распределения вероятностей для классической частицы.

Рассмотрим теперь квантовую частицу, у которой имеется ограничение  $\Delta x \cdot \Delta p > \hbar$  для неопределенностей по координате  $\Delta x$  и импульсу  $\Delta p$ . Пусть эта частица находится в смешанном состоянии, например представляет собой набор волновых пакетов с вероятностью  $|C_i|^2$  нахождения в  $i$ -м пакете. Такая частица мало отличается от классической, если каждый из волновых пакетов не успевает расплыться за время наблюдения. Столкновение частицы с теплой стенкой приводит к тому, что только один из волновых пакетов остается реально существующим после неупругого отражения: в остальных пакетах частицы нет, и они автоматически уничтожаются. И если в данном

процессе для внешнего окружения действительно важно, в каком состоянии отлетает частица, то можно сказать, что происходит коллапс смешанного состояния.

Несколько сложнее выглядит картина при коллапсе чистого состояния. Допустим, что на стенку падает очень широкий почти монохроматический пакет с  $\Delta x \cdot \Delta p \ll \hbar$ . Величина  $|\psi|^2$  в таком пакете играет роль распределения вероятностей и поэтому она, в принципе, может коллапсировать точно так же, как плотность распределения вероятностей классической частицы. Если бы  $|\psi|^2$  было классическим распределением вероятностей, то неупругое отражение, сопровождаемое "записью" информации об ударе в самом теле, просто случайно "выхватывало" бы частицу из облака  $|\psi|^2$ , уничтожив полностью падающую часть и испустив сильно локализованную отраженную часть плотности вероятности. Что-то похожее происходит и с квантовой частицей. Если разрезать падающий волновой пакет на широкие доли толщиной  $\Delta x$ , то при достаточно большой величине  $\Delta x$  коллапс произойдет только в один из слоев. Сам факт локализации по  $x$  автоматически уширяет распределение по импульсам на величину  $\hbar/\Delta x$ . Это уширение не может быть больше меры неупругости столкновения. Если, например, при столкновении скорость частицы меняется на величину масштаба  $v_T$ , то минимальный размер неупругого отраженного пакета может составлять величину  $\sim \hbar/mv_T = b_0$ . Поскольку неупругое отражение частицы происходит от многих атомов стенки, то при  $\Delta v \sim v_T$  величина  $b_0$  соответствует длине когерентности пакета. Естественно допустить, что частица попадает только в один из когерентных пакетов. Если по каким-либо обстоятельствам вероятностная локализация частицы окажется существенно больше ширины когерентности, то это означает, что мы опять получаем смешанное состояние с некоторым распределением вероятностей  $|C_i|^2$  нахождения частицы в  $i$ -м чистом состоянии.

Мы неоднократно будем возвращаться к феномену коллапса волновой функции. А теперь еще раз подчеркнем необратимый характер флуктуационных эффектов. Рассмотрим опять одну-единственную частицу в длинной трубке — термостате длиной  $L$ . Если мы локализуем частицу в какой-то точке, находящейся в средней части трубки, то она начнет диффундировать вдоль  $x$  с коэффициентом диффузии  $D$ . Это типично необратимый процесс, сопровождаемый ростом энтропии по закону  $S \sim \ln(Dt)$ . С другой стороны, каждый удар о боковую стенку можно рассматривать как случайное событие, которое локализует частицу на длине масштаба  $a$ . Каждый такой удар — это тоже необратимый процесс, но не с возрастанием энтропии, а с ее убыванием. В чем тут дело?

Этот весьма принципиальный вопрос следует рассмотреть подробнее.

Пусть частица находится в трубке длиной  $L$ , разделенной на  $N = L/b$  одинаковых ячеек, длиной " $b$ " каждая (рис. 3а). В начальном состоянии положение частицы не известно, а ее энтропия равна  $S = \ln(L/b)$ . Пусть теперь частица оказалась в заштрихованной ячейке на рис. 3б. Процесс появления частицы можно описать, например, как чисто флуктуационный коллапс: одним ударом о боковую стенку частица

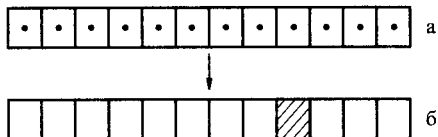


Рис. 3. В результате флуктуаций частица из первоначально однородного состояния (а) локализуется в одну единственную ячейку (б).

"заявляет" о своем положении, а все остальные вероятности обращаются в нуль. Происходит случайное событие со сбросом энтропии частицы до нуля, но при этом обязательно появление одного бита информации в стенке заштрихованной ячейки на рис. 3б.

Эта информация могла бы подвергнуться последующей переработке: воспринимающая система могла бы "записать" эту информацию, как одну из  $N = L/b$  возможностей, так что соответствующая величина  $I$  равнялась бы  $I = \ln(L/b)$ . При этом  $I$  относилась бы к информации внешней системы наблюдения относительно положения частицы, и мы имели бы  $I + S = \text{const} = \ln(L/b)$ .

Если удар частицы о стенку запускает в действие внешнюю информационную систему, то с помощью полученной информации можно получать работу за счет теплового движения. А если этого не делать, то воспринятая информация просто "забывается" в необратимом процессе возрастания энтропии. Чтобы получить максимум работы, нужно использовать максимальные возможности для восприятия информации и последующего возрастания энтропии частицы в процессе расширения свободного объема.

В другом крайнем случае можно не предпринимать никаких действий с полученной информацией и даже не "воспринимать" ее, оставаясь в незнании, где именно находится частица. Тогда равновесное "путешествие" частицы по трубке на рис. 3а будет простым тепловым блужданием с постоянной (в среднем) энтропией  $S = \ln(L/b)$ .

Таким образом, с информацией о частице можно поступать самыми различными способами. Пусть, например, в стенке каждой



ячейки на рис. За имеется датчик, который регистрирует удар частицы о стенку. Если поперечный размер трубки больше длины ячейки " $b$ ", то повторные удары в одной ячейке будут редки, так что частица между ударами будет успевать "перепрыгивать" из одной ячейки в другую. Проводя много измерений, можно измерить среднюю частоту столкновений со стенками  $\tau$  и средний квадрат смещения  $(1/2)(\Delta x)^2/\tau$  между столкновениями. По этим величинам можно вычислить коэффициент диффузии  $D = (\Delta x)^2\tau$ , и затем можно использовать статистическое описание для броуновского движения частицы. Фактически вместо описания индивидуальной частицы мы вводим ансамбль одинаковых систем, и тогда средняя эволюция этого ансамбля соответствует вероятностному, т.е. неполному, описанию динамики частицы.

Соответствующий диффузионный процесс является необратимым с монотонным возрастанием энтропии, если в начальном состоянии она была не максимальна. Например, если вначале ансамбль одинаковых систем соответствовал положению частицы в заштрихованной ячейке с нулевой энтропией, то в последующие промежутки времени "облако" вероятностей будет расширяться по закону  $(\overline{\Delta x})^2 = 2Dt$ , а энтропия будет возрастать со временем по логарифмическому закону. Но если из этого ансамбля выделить одну единственную индивидуальную частицу, то первый же удар о стенку, зарегистрированной некоторой ячейкой, приведет к коллапсу априорной вероятности  $p(x, v, t)$  в одну ячейку с резким сбросом энтропии частицы до нуля.

Кажется, что этот коллапс происходит независимо от наличия или отсутствия датчиков на стенках. На самом деле это не так: процесс коллапса жестко связан с системой измерения. Например, все электрические сигналы от датчиков можно свести на один вход, и тогда будет зарегистрирован только факт удара, т.е. как бы факт коллапса без указания, в какую именно ячейку произошел коллапс. А если сделать необратимые датчики типа миниатюрных фотопластинок, то факт коллапса будет зафиксирован в одной из ячеек, но пока что без немедленного восприятия его внешними регистрирующими приборами.

В последних примерах очень хорошо видно, что для регистрации самого лишь факта коллапса достаточно одного бита информации. Коллапс — это необратимый процесс, точнее, случайное событие, отвечающее удару, а объем соответствующей новой информации  $I$  и величина уменьшения предшествующей энтропии  $S$  зависят прежде всего от того ансамбля, который моделирует усредненные статистические характеристики движения частицы. Следовательно, величины  $S$  и  $I$  относятся не столько к частице, сколько к совместной системе —

частица плюс ее ближайшее окружение, включая наблюдение и восприятие информации о частице.

Два этих физических явления удобно разделить между собой. Первое событие — случайное появление частицы в одной из возможных позиций с соответствующей "маркировкой" номера ячейки — мы будем называть "хинт" (от английского слова *hint* — намек). Хинт — это "выпадение" числа на брошенном кубике. Хинт плюс восприятие или "запись" информации составляют собой то, что называется "наблюдением" или "измерением". Полный процесс измерения может идти с сильным изменением — "коллапсом" априорной вероятности и, соответственно, с большим изменением энтропии, относящейся к ансамблю — представителю коллективного аспекта динамики данной частицы.

Итак, измерение в классической механике можно представлять себе как комбинацию (связку) хинта — выпадения данного числового значения для измеряемой величины и последующей регистрации и записи этого значения. Суммарно — это необратимый процесс, сопровождаемый возрастанием энтропии внешнего мира. А с точки зрения более общей квантовой теории хинт — это коллапс волновой функции.

Рассмотрим еще один аспект взаимодействия классической частицы с макрообъектом. До сих пор мы считали, что стенки сосуда

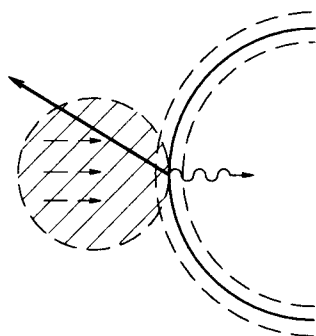


Рис. 4. Падающее на стенку "облако" распределения вероятностей превращается в одну отраженную частицу. Граница твердого тела имеет неопределенность, условно обозначенную штриховыми линиями. Волнистая линия — информация об ударе, "записанная" в макротеле, сплошная стрелка — информация, ушедшая во внешний мир.

или термостата имеют строго очерченные геометрические размеры, и вероятностное описание требовалось только для частицы. В общем случае это не так: сами стенки находятся в хаотическом случайном движении, а кроме того, внешние приборы могут быть не достаточно точны для точного и постоянного во времени слежения за положением макроскопических тел. Допустим, что положение стенок определено с некоторой погрешностью, и имеется некоторая плотность вероятности для распределения положений границы стенки (рис. 4).

На рисунке 4 сплошная линия показывает основную

(в среднем) границу твердого тела, а штриховые линии — неопределенность. На эту границу падает "облако" распределения вероятностей  $p(x, v, t)$ . После неупругого отражения в теле может остаться один бит информации о факте удара, а от тела отлетает частица. Если вдали от тела эта частица будет зарегистрирована либо прибором, либо самопроизвольным необратимым процессом, для которого факт появления частицы играет определенную роль в дальнейшей эволюции системы, то отраженную частицу следует считать находящейся в локализованном состоянии:

$$p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0),$$

где  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$  — координаты сразу после удара при  $t = 0$ .

Как мы видим, в этих условиях после отскока частицы от границы тела распределение вероятностей частицы коллапсирует, а с неопределенностью самого тела пока еще ничего не происходит: частица может отскочить как от сплошной, так и от любой из пунктирных линий (см. рис. 4). Но если от одной и той же точки стенки отскочит не одна, а две падающие частицы, то точка их пересечения может быть локализована, и во внешний мир будет перенесена информация, что только точка сплошной линии является реальной. Еще двух частиц будет достаточно для того, чтобы зафиксировать угол направления сплошной линии в плоскости чертежа. Произойдет коллапс не только вероятностей для движения частиц, но и коллапс вероятностей расположения твердого тела. Как мы видим, одной лишь информационной связи с внешним миром достаточно для того, чтобы функция распределения вероятностей положения твердого тела коллапсировала в состояние, отвечающее вполне определенному положению классического объекта (разумеется, с точностью до тепловых флуктуаций границы).

Рассмотрим теперь, что происходит с падением и последующим отражением квантовой частицы от макротела с фиксированной границей. Если налетающее "облако"  $|\psi|^2$  или матрицы плотности частицы являются достаточно протяженными, то картина будет мало отличаться от классической. Независимо от того, является ли падающее состояние чистым или смешанным, от границы тела при неупругом взаимодействии (с соответствующим "измерением" внутри тела) отразится сильно локализованное "облако". Возникнет лишь ограничение на неопределенность координаты и импульса, соответствующее соотношению неопределенностей Гейзенберга. Но если граница макротела сама имеет неопределенность, отвечающую излишне протяженной волновой функции макротела, то картина

изменится. Последовательные отражения одной за другой частиц будут приводить к сужению волнового пакета макротела. И так как распыление квантового пакета макротела происходит очень медленно, то в конце концов пакет приобретет черты классического объекта. Именно взаимодействие с внешним миром превращает макротела в классические объекты с локализованными волновыми функциями. В общем случае при взаимодействии микрочастиц с другими объектами мы получаем два предела: микромир легких частиц и макромир очень массивных тел, с некоторой промежуточной областью между ними для тел с малыми, но макроскопическими масштабами.

## 24. Измерение в квантовой теории

Обсудим более подробно проблему измерений в квантовой механике. Для этого удобно вернуться к рис. 1, где схематически изображен процесс восприятия информации, возникающей в результате события  $u_i$  в физической системе  $U$ . Строки  $A$ ,  $F$  рис. 1, 2 поясняют, как эта информация может быть воспринята. Но для нас сейчас важна только первая строка  $U$ , которая показывает сам факт события  $u_i$ . Именно с такого события и начинается измерение классической или квантовой системы.

Следуя логике и обозначениям книги Ю. Швингера [23], будем считать, что событие  $u_i$  представляет собой факт измерения, приводящего к селекции  $u_i$  среди множества других возможных реализаций физической величины  $U$ .

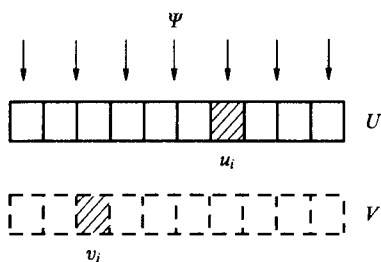


Рис. 5. Селективное измерение  $M(u_i)$  в квантовой теории отвечает случайному событию, когда физическая величина  $U$ , имеющая возможность принимать одно из  $N$  значений, оказывается в одной единственной ячейке  $u_i$ ; штрихом отмечена возможность добавления к системе еще одной физической величины  $v$ .

Обозначим это событие символом  $M(u_i)$ . Как показывает рис. 5, символ  $M(u_i)$  означает просто, что квантовая частица, которая могла бы быть в любом из  $N$  возможных состояний, в данном событии оказывается в ячейке  $u_i$ . Другими словами,  $M(u_i)$  соответствует коллапсу  $U \rightarrow u_i$ .

Тот же самый процесс можно разъяснить в нескольких иных терминах. Допустим, что мы имеем квантовую частицу с волновой

функцией  $\psi$ , падающую на прибор, т.е. на некоторое макротело, имеющее сложное внутреннее устройство. На входе в прибор имеется анализатор, который указывает, как именно может быть воспринята информация о падающей частице. В квантовой механике это означает способ установления собственных векторов  $\psi_i$ , по которым может быть разложена  $\psi$ -функция:  $\psi = \sum_i c_i \psi_i$ . Собственные функции  $\psi_i$  считаются ортогональными и нормированными, и каждая из них отвечает собственному значению  $u_i$  физической величины  $U$ . Пусть имеется  $N$  таких функций и, соответственно, число ячеек (см. рис. 5) равно  $N$ . Прибор селективного измерения на рис. 5 при каждом акте измерения оставляет только одну функцию  $\psi_i$ . Если все остальные функции уничтожаются, то происходит коллапс  $\psi \rightarrow \psi_i$ , который соответствует тому факту, что подвергающаяся измерению частица "попала" в состояние " $i$ ". Подчеркнем, что при таком селективном измерении с последующим восприятием соответствующей информации факт отсутствия частицы в любой из оставшихся пустых ячеек для последующей "истории" ровным счетом ничего не означает: реальной и содержательной является лишь информация со значением физической величины  $U$ , равным  $u_i$ .

Единичный акт измерения можно считать чисто случайным, и он явно не достаточен для того, чтобы установить, какова структура  $\psi$ -функции. Только повторяя измерения много раз, можно найти средние значения для вероятностей реализации значений  $u_i$  рассматриваемой физической величины  $U$ . Многократное повторение измерений порождает смешанный ансамбль, который можно описывать матрицей плотности, если в этом есть необходимость. Но сейчас мы сосредоточим наше внимание на самом измерении.

Итак, символ  $M(u_i)$  соответствует событию селективного измерения, которое оставляет (или "пропускает") частицу со значением  $u_i$  величины  $U$ , отбрасывая (т.е. уничтожая) все другие состояния.

Класс селективных измерений допускает естественное расширение. А именно, пусть в приборе установлена диафрагма  $D$ , которая отсекает часть падающей на прибор  $\psi$ -функции (рис. 6). Тогда ячейки, попавшие под диафрагму, никогда не будут

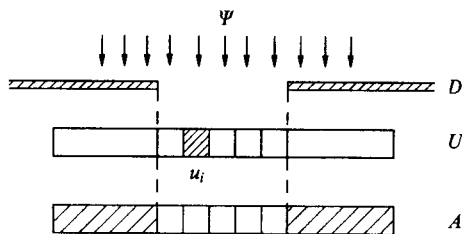


Рис. 6. Диафрагма  $D$  может уменьшать число состояний, доступных для регистрации анализатором  $A$  (недоступная область заштрихована).

зарегистрированы. В частности, если диафрагма закрывает все ячейки, кроме " $i$ "-й, то будет отобран подансамбль со значением  $u_i$  величины  $U$ . А если перекрыть все ячейки, то мы получим измерение, которое естественно обозначать символом 0. Напротив, если полностью открыть диафрагму и не регистрировать, какое именно значение  $u_i$  будет получено, то такое крайне неселективное измерение можно обозначать символом 1. Нетрудно, далее, ввести операции сложения и умножения символов измерения. Операция сложения порождает не столь селективное измерение, когда в результате измерений получается подансамбль, отвечающий всем фигурирующим в сумме значениям величины  $U$ , т.е. одно из них нельзя отличить от других с помощью такого измерения. Измерение, которое отвечает сумме по всем  $u_i$ , т.е. пропускающее весь ансамбль без разделения его на подансамбли, очевидно, следует считать равным единице. Операция умножения символов измерения обозначает последовательное выполнение измерений (читать справа налево). Из физического смысла введенных операций следует, что сложение коммутативно и ассоциативно, а умножение ассоциативно.

Свойства элементарных операций под селективными символами измерений записываются в виде

$$\begin{aligned} M(u_i)M(u_i) &= M(u_i), \\ M(u_i)M(u_j) &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \end{aligned} \quad (107)$$

$$\sum_i M(u_i) = 1,$$

где символы 0 и 1 отвечают измерениям, которые либо отбрасывают, либо пропускают все системы. По смыслу этих последних измерений они обладают алгебраическими свойствами

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1, \quad 0 \cdot 0 = 0, \\ 1 \cdot 0 &= 0 \cdot 1 = 0, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} 1 + 0 &= 1, \\ 1 \cdot M(u_i) &= M(u_i) \cdot 1 = M(u_i), \\ 0 \cdot M(u_i) &= M(u_i) \cdot 0 = 0, \end{aligned} \quad (109)$$

$$M(u_i) + 0 = M(u_i).$$

До сих пор мы имели в виду только одну физическую величину  $U$ , действие которой на волновую функцию  $\psi$  рассматривается в кван-

товой механике как оператор

$$U\psi = U \sum_i c_i \psi_i = \sum_i c_i u_i \psi_i.$$

Естественно, что физических величин может быть много. Соответственно, может быть много измерительных приборов. Две физические величины  $U^{(1)}$  и  $U^{(2)}$  называются совместимыми, если измерение одной из них не разрушает знания, полученного предшествующим измерением другой. На рисунке 5 они обозначены символами  $U$ ,  $V$ . Соответствующие селективные измерения  $M(u_i^{(1)})$  и  $M(u_j^{(2)})$ , выполненные в том или ином порядке, порождают ансамбль систем, в которых величины  $U^{(1)}$  и  $U^{(2)}$  одновременно имеют вполне определенные значения  $u_i^{(1)}$  и  $u_j^{(2)}$ . Соответственно, можно ввести символ составного селективного измерения:

$$M(u_i^{(1)}, u_j^{(2)}) = M(u_i^{(1)})M(u_j^{(2)}) = M(u_j^{(2)})M(u_i^{(1)}). \quad (110)$$

Под полным набором совместимых физических величин  $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(k)}$  понимается такой набор физических величин, каждая пара которого совместима, и в то же время не существует никаких других физических величин, совместимых с каждым из  $U^{(s)}$ . Тогда символ

$$M(u) = \prod_{s=1}^k M(u_i^{(s)}) \quad (111)$$

описывает полное измерение. Оно отвечает максимальному количеству признаков, которые могут быть получены одновременно, без неконтролируемого изменения значения одного из них, полученного в предварительно проведенном измерении. Символические свойства полных измерений также соответствуют соотношениям (108), (109).

Сделаем еще один шаг на пути к расширению класса измерений. А именно, рассмотрим измерения, которые могут приводить к изменению состояния. Пусть символ  $M(u_i, u_j)$  обозначает селективное измерение, при котором воспринимаются только системы в состоянии " $j$ ", а возникают системы в состоянии " $i$ ". Соответственно, значение  $u_j$  физической величины  $U$  переводится в значение  $u_i$ . Разумеется,  $M(u_i, u_i) = M(u_i)$ . Нетрудно видеть, что измерения типа  $M(u_i, u_j)$  обладают свойством

$$M(u_i, u_j)M(u_k, u_l) = \delta_{jk}M(u_i, u_l), \quad (112)$$

где  $\delta_{jk} = 0$  при  $j \neq k$  и  $\delta_{ii} = 1$ . В самом деле, левый множитель  $M(u_i, u_j)$  пропускает только те состояния, у которых величина  $U$  принимает значение  $u_j$ , т.е.  $u_k$  обязано быть равным  $u_j$ . Заметим, что если множители в (112) поменять местами, то получим

$$M(u_k, u_l)M(u_i, u_j) = \delta_{li}M(u_k, u_j), \quad (113)$$

откуда видно, что умножение символов измерения (112), (113) некоммутативно.

Наряду с полным набором  $U$  могут существовать и другие полные наборы:  $V, W, \dots$ , которые взаимно несовместимы. Символы измерения вида  $M(u_i, u_j)$  можно построить для каждого из таких наборов. Естественно, возникает вопрос о том, как выглядит селективное измерение, связывающее два таких набора. Символом  $M(u_i, v_j)$  обозначается процесс измерения, которое отсекает все значения, кроме  $v_j$ , у физической величины  $V$  и которое выпускает из себя систему в состоянии  $u_i$  физической величины  $U$ .

Сконструируем теперь составное измерение  $M(u_i, v_j)M(w_k, z_l)$ . Конечным результатом такого измерения является отбор состояния  $z_l$  и перевод его в  $u_i$ , т.е. оно должно быть селективным измерением типа  $M(u_i, z_l)$ . Однако на первом этапе возникает система в состоянии  $w_k$ , и только вторая ступень отбирает состояние  $v_j$ . Если бы  $v_j$  и  $w_k$  принадлежали к одной физической величине, т.е.  $V \equiv W$ , то мы получили бы промежуточный множитель  $\delta_{jk}$ , равный либо нулю, либо единице. Однако в общем случае разных величин  $V \neq W$  можно ожидать, что переходный множитель будет флуктуировать от измерения к измерению. В среднем только некоторая доля состояний, выходящих из  $W$ , будет восприниматься второй ступенью измерения составного прибора. Поэтому естественно допустить, что в среднем

$$M(u_i, v_j)M(w_k, z_l) = \langle v_j | w_k \rangle M(u_i, z_l). \quad (114)$$

Здесь величина  $\langle v_j | w_k \rangle$  есть число, так что матрица  $\langle v_j | w_k \rangle$  характеризует статистическую связь между состояниями  $V$  и  $W$ . В частном случае  $V \equiv W$  имеем, очевидно,

$$\langle v_j | v_k \rangle = \delta_{jk}. \quad (115)$$

Так как  $M(u_i, u_i) = M(u_i)$ , то из общего соотношения (114) получаем

$$M(v_j)M(w_k, z_l) = \langle v_j | w_k \rangle M(v_j, z_l), \quad (116)$$

$$M(u_i, v_j)M(z_l) = \langle v_j | z_l \rangle M(u_i, z_l). \quad (117)$$



Появление числовых множителей типа  $\langle v_j | w_k \rangle$  в соотношениях (114)–(117) имеет принципиальное значение для квантовой теории. Формально эти множители возникли как свойство измерений, но, как мы увидим далее, они фактически ведут к принципу суперпозиции состояний — основному положительному принципу квантовой механики.

Но сначала рассмотрим некоторые простейшие следствия из полученных выше соотношений. Полагая  $w_k = z_l$  в (116) и учитывая соотношение  $M(w_k, w_k) = M(w_k)$ , получим

$$M(v_j)M(w_k) = \langle v_j | w_k \rangle M(v_j, w_k). \quad (118)$$

Рассмотрим теперь тройное произведение  $M(v_j)M(u_i)M(w_k)$ , которое мы просуммируем по всем промежуточным значениям  $u_i$ . Тогда, с одной стороны, мы получим просто величину (118), а с другой — для первой пары сомножителей можно воспользоваться соотношением (118), а затем воспользоваться связью (117), так что получим

$$\begin{aligned} \sum_{u_i} M(v_j)M(u_i)M(w_k) &= \langle v_j | w_k \rangle M(v_j, w_k) = \\ &= \sum_{u_i} \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | w_k \rangle M(v_j, w_k). \end{aligned} \quad (119)$$

Сравнивая два последних выражения, находим

$$\sum_{u_i} \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | w_k \rangle = \langle v_j | w_k \rangle. \quad (120)$$

В частном случае, когда  $V \equiv W$ , получаем

$$\sum_{u_i} \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | w_k \rangle = \delta_{jk}. \quad (121)$$

Пока это чисто алгебраические соотношения, являющиеся простым следствием введенных выше определений для символов измерения. Но рассмотрим более простое произведение  $M(v_j)M(u_i)M(v_j)$ . По аналогии с последним выражением в (119) (без суммирования по  $u_i$ ), получим

$$M(v_j)M(u_i)M(v_j) = p(u_i, v_j)M(v_j), \quad (122)$$

где

$$p(u_i, v_j) = \langle v_j | u_i \rangle \langle u_i | v_j \rangle = p(v_j, u_i). \quad (123)$$

Смысл левой части соотношения (122) состоит в том, что прибор отбирает сначала состояние  $v_j$ , затем из него отбирается та часть, которая может быть пропущена как  $u_i$ , а затем из прибора вновь исходит состояние  $v_j$ . Таким образом,  $p(u_i, v_j)$  играет роль вероятности для состояния  $v_j$  пройти через весь прибор, т.е.  $p(u_i, v_j)$  можно интерпретировать как вероятность обнаружить состояние  $u_i$  в исходном состоянии  $v_j$ . Вероятность  $p$  следует считать вещественной неотрицательной величиной. Поэтому естественно принять, что сомножители в (123) являются взаимно сопряженными:

$$\langle v_j | u_i \rangle = \langle u_i | v_j \rangle^* . \quad (124)$$

В силу соотношений (121), (124) матрицу  $S$  с матричными элементами  $S_{ij} = \langle u_i | v_j \rangle$  следует считать унитарной.

Приведенные выше соотношения можно записать в более привычном виде, если воспользоваться языком волновой механики. Пусть  $\psi$  есть измеряемая волновая функция. Она может быть представлена в виде суперпозиции собственных функций операторов  $U, V$ :

$$\psi = \sum_i c_i \psi_i = \sum_j b_j \varphi_j , \quad (125)$$

где  $U\psi_i = u_i\psi_i$ ,  $V\varphi_j = v_j\varphi_j$ . Естественно, что символы измерения тоже можно рассматривать как операторы, так что

$$M(u_i)\psi = c_i\psi_i, \quad M(v_j)\psi = b_j\varphi_j . \quad (126)$$

Каждая из функций  $\varphi_l$  может быть выражена как линейная суперпозиция функций  $\psi_k$  просто в силу свойств собственных функций (мы допускаем, что эрмитовы операторы  $V, W$  обладают всеми нужными свойствами). Пусть это соотношение имеет вид

$$\varphi_l = \sum_j S_{lj} \psi_j . \quad (127)$$

Применим к этому соотношению оператор  $M(v_k)$ . В правой части этого соотношения он оставит только одно слагаемое с  $j = k$ , а в левой части вместо  $M(v_k)$  можно использовать оператор  $M(v_k)M(u_i)$ , поскольку  $M(u_i)\psi_i = \psi_i$ . Но теперь мы можем воспользоваться соотношением типа (118), согласно которому имеем

$$M(v_l)M(u_i)\psi_i = \langle v_l | u_i \rangle \varphi_l , \quad (128)$$

поскольку  $M(v_l, u_i)\psi_i = \varphi_l$ . Следовательно,

$$S_{il} = \langle v_l, u_i \rangle, \quad \text{т.е.} \quad \psi_i = \sum_j \langle v_j | u_i \rangle \varphi_j . \quad (129)$$

Мы получили соотношение для перехода от одного представления к другому. Если считать, как обычно, что  $\psi_i$ ,  $\varphi_l$  представляют собой ортонормированные базисы, то нетрудно получить

$$b_j = \sum_i \langle v_j | u_i \rangle c_i. \quad (130)$$

Если построить теперь выражение  $|b_j|^2$ , то в правой части (130) у нас возникнет суперпозиция слагаемых вида  $c_i^* c_i$ . Сделаем допущение, что разности фаз у взаимно ортогональных амплитуд не имеют прямого физического смысла и могут быть хаотическими. Тогда после усреднения по фазам получим

$$|b_j|^2 = \sum_i p(u_i, v_j) |c_i|^2, \quad (131)$$

где вероятность перехода определена соотношением (123). Теперь соотношение (131) выглядит как связь между вероятностями, если величины  $|b_j|^2$  и  $|c_i|^2$  интерпретировать как вероятности. При этом делается (иногда неявное) допущение, что фазы отдельных мод в разложении  $\psi$ -функции по собственным функциям являются взаимно хаотическими. Таким образом, измерение в квантовой механике изначально опирается на появление некогерентности у взаимно ортогональных мод.

Вернемся к рис. 5. Селективное измерение  $M(u_i)$  намечает только ту ячейку, в которой окажется физическая величина  $U$ , если соответствующая информация воспринимается прибором. При этом волновая функция коллапсирует в  $\psi_i$ , а все коэффициенты  $c_k$ , за исключением  $c_i$ , исчезают. Что касается коэффициента  $c_i$ , то он превращается в единицу. Таким образом, в рамках изложенной логики измерение оказывается как бы составленным из двух тесно связанных элементов: символ измерения  $M(u_i)$  "указывает пальцем" на величину  $u_i$ , а восприятие  $u_i$  осуществляет коллапс функции  $\psi \rightarrow \psi_i$  и распределения вероятностей  $|c_k|^2 \rightarrow \delta_{ik}$ .

Символ измерения построен таким образом, что он не определяет еще полностью результат измерения. В частности, если на рис. 5 вслед за "линейкой" клеток  $u_i$  величины  $U$  расположить аналогичную "линейку" величины  $V$ , то можно осуществить процесс, когда первая линейка пропустит только  $\psi_i$ , т.е.  $\psi$  превратится в  $c_i \psi_i$ , не будучи еще измеренной. Таким образом, именно символ измерения и играет роль хинта, т.е. намек на то, какая величина может оказаться измеренной. Затем  $\psi_i = \sum_j \langle v_j | u_i \rangle \varphi_j$  упадет на вторую линейку, и только там и произойдет окончательный коллапс  $\psi \rightarrow \varphi_j$  с соответствующим составным измерением. Если повторять его много раз, меняя ячейки

" $t$ ", то можно получить соотношение (131), связывающее между собой вероятности  $|b_j|^2$  и  $|c_i|^2$  с помощью вероятности перехода  $p(u_i, v_j)$ .

Поскольку в составном измерении  $M(v_j, u_i)$  определен порядок выполнения операций, то появляется возможность временной последовательности измерений. В частности, если уровню  $U$  отвечает функция  $\psi(0)$ , то уровню  $V$  на рис. 5 можно приписать функцию  $\psi(t)$ , связанную с  $\psi(0)$  соотношением

$$\psi(t) = S\psi(0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right)\psi(0), \quad (132)$$

где  $H$  — оператор Гамильтона. Тогда и  $S$ -матрица приобретает смысл оператора перехода от начального времени  $t = 0$  к некоторому последующему моменту времени  $t$ . А волновая функция  $\psi(t)$  удовлетворяет уравнению Шрёдингера.

Теперь мы можем более точно осознать, в чем состоит принцип суперпозиции. Соотношение (131) означает, что для любой линейной суперпозиции волновых функций, т.е. для любого разложения  $\psi$ -функции по любому из базисов, у нас имеется готовая вероятностная интерпретация того, что будет происходить при измерениях: квадраты амплитуд дают вероятности, а квадраты матричных элементов — вероятности переходов. А вся временная эволюция этих будущих возможных элементов процесса измерения определяется линейным уравнением Шрёдингера.

Почему же мы пришли к квантовой механике? Если вернуться еще раз к началу этого раздела и снова пройти по логике введения символов измерения  $M(u_i)$ , то совершенно не очевидно, что они приведут не к классической механике, а к квантовой. Намек на появление элементов квантовомеханического подхода возникает впервые в формуле (114), когда первый раз вводится матричный элемент  $\langle v_j | w_k \rangle$ , т.е. число, отличное от тривиальных нуля и единицы в формулах (107)–(109). А при составлении симметричного выражения (122) возник квадрат матричного элемента (123), который можно интерпретировать как вероятность перехода.

Но самый главный и решающий шаг к волновой механике делается при переходе от (130) к (131), когда предположение о хаотичности фаз у взаимно ортогональных амплитуд позволяет сделать вывод о том, что только квадраты амплитуд вида  $|c_i|^2$  имеют реальный физический смысл и интерпретируются как соответствующие вероятности.

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Все действия над символами перехода мы условились производить в порядке справа налево. Но их можно читать и слева направо,

разумеется, в некотором другом понимании. Например, соотношение (114) можно прочитать слева направо, считая, что первый оператор слева воспринимает  $u_i$ , а выпускает  $v_j$ , второй воспринимает  $w_k$  и испускает  $z_l$  и т.д. Но можно было бы построить этот же самый процесс в обычном порядке, т.е. получить

$$M(z_l, w_k)M(v_j, u_i) = \langle w_k | v_j \rangle M(z_l, u_i). \quad (133)$$

Появившийся здесь матричный элемент согласно соотношению (124) равен  $\langle w_k | v_j \rangle = \langle v_j | w_k \rangle^*$ . Смысл прочтения соотношения (133) по элементам справа налево был интерпретирован нами как выполнение операций последовательно во времени, т.е. из прошлого в будущее. Следовательно, прочтение (114) слева направо означает выполнение действий в последовательности из будущего в прошлое. Как мы видим, вся разница между (114) и (133) состоит лишь в комплексном сопряжении операторов. Таким образом, начиная с введения символов составного измерения и далее, мы уже "вступили на тропу" квантовой механики, создавая символическую основу для полностью обратимых операций. Вся последующая логика автоматически приводит к выводу о полной обратимости квантовомеханических процессов: чтобы изменить время, достаточно лишь перейти к комплексно сопряженным величинам. Соответственно, соотношение (122) можно интерпретировать как условие "встречи" прошлого с будущим. В этом месте прибор может разорвать квантовомеханическую причинную связь прошлого с будущим, но на результаты его измерения накладывается вероятностная связь (123).

Из этих рассуждений ясно видно, что логика квантовой механики проводит жесткое разграничение между двумя классами событий. Собственным предметом квантовой механики является изучение полностью обратимых процессов, начиная от некоторого заданного извне состояния и вплоть до входа в прибор, где происходит сильно необратимый процесс коллапса волновой функции. Волновая механика описывает эволюцию волновой функции и предсказывает лишь вероятности тех или иных результатов измерений. Таким образом, волновая механика — это скорее мощный аппарат для изучения возможностей, чем "приземленная" теория реально протекающих процессов. В особенности отчетливо это видно в так называемой "многомировой интерпретации" квантовой механики [24], но мы не будем сейчас отвлекаться на обсуждение этого предмета.

Вместо этого рассмотрим конкретный пример типично квантового процесса — радиоактивного распада. Схематически он изображен на рис. 7.

Допустим, что в точке  $R$  находится радиоактивное ядро  $R$ , которое при распаде испускает  $\alpha$ -частицы. Согласно квантовой механике волновая функция  $\alpha$ -частицы состоит из локализованной внутри ядра

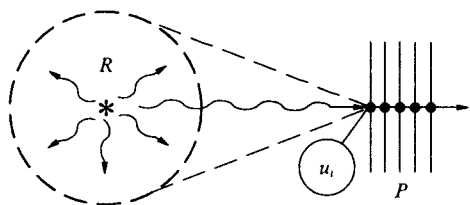


Рис. 7. Схематическое изображение прибора для измерения  $\alpha$ -частицы при радиоактивном распаде ядра  $R$ . Штрихом отмечен вариант измерения, когда точное положение ядра  $R$  неизвестно.

части и вытекающего вовне волнового потока, условно изображенного на рис. 7 волновыми стрелками. Допустим, что регистрирующий  $\alpha$ -частицы прибор состоит из множества тонких пластинок, каждая из которых содержит огромное число ячеек, соединенных со счетчиками, регистрирующими факт прохождения  $\alpha$ -частицы через

ту или иную из ячеек. Все ячейки находятся в ждущем режиме и не передают никакой информации в запоминающее устройство прибора, если сигналов на ячейках нет.

Пусть теперь в некоторый момент времени  $t$  ячейка  $u_i$  самой первой пластинки зарегистрировала факт прохождения  $\alpha$ -частицы и передала эту информацию для переработки и восприятия внутри прибора. С  $\psi$ -функцией при этом произойдут огромные изменения. По отношению к будущему происходит полный коллапс волновой функции в компактный волновой пакет, который будет затем пересекать все остальные пластинки вдоль штриховой линии, изображенной на рис. 7. Соответственно, только эти ячейки и откликнутся на  $\alpha$ -частицу. Но не менее удивительный феномен возникает по отношению к прошлому. А именно, вся волновая функция в прошлом также коллапсирует в волновой пакет, движущийся по направлению к ячейке  $u_i$ , так что по скорости частицы  $v$  и расстоянию  $L$  от  $R$  до  $u_i$  можно приближенно найти время  $t - (L/v)$ , когда этот коллапс произошел. В этот расчетный момент не только коллапсирует в волновой пакет вся внешняя волновая функция, кроме бегущего к прибору волнового пакета, но и уничтожается волновая функция  $\alpha$ -частицы внутри ядра.

Если начальная волновая функция самого ядра не была локализованной, а покрывала штриховой круг на рис. 7, то первое измерение на первой пластинке еще не фиксирует луча  $\alpha$ -частицы внутри штриховых касательных к этому кругу. Но уже второе измерение на последующей пластине фиксирует сам луч, по которому прилетела  $\alpha$ -частица. Впрочем, одних лишь измерений с одной  $\alpha$ -частицей недостаточно, чтобы точно зафиксировать положение ядра на луче и определить

момент времени  $\alpha$ -распада, т.е. коллапса волновой функции на самом ядре. В этом отношении сохраняется некоторая неопределенность. Но если у нас имеется небольшая крупинка радиоактивного элемента, то многие измерения  $\alpha$ -частиц фиксируют положение этой крупинки (если эта информация не была получена другим образом).

Допустим теперь, что вместо радиоактивного ядра  $R$  мы используем его классический имитатор, т.е. малую классическую "теплую" ловушку, которая может испускать классические частицы с тем же самым временем жизни. Будем считать, что и измерительный прибор имеет сходную конструкцию. Нетрудно видеть, что соответствующий классический "распад" будет иметь много общего с рис. 7. Вместо потока  $\psi$  вовне "ядра" мы будем иметь теперь поток плотности вероятности. Измерение " $u_i$ " опять схлопывает этот поток в компактный сгусток, который в будущем пересечет все пластинки прибора  $P$ , а в прошлом происходит коллапс вероятности, сходный с коллапсом волновой функции. С точностью до соотношений неопределенностей оба процесса очень похожи друг на друга. Но в классическом случае мы точно знаем, что существуют частицы с классическими траекториями, и вероятностное описание используется просто в силу неполного знания "жизни" классической частицы внутри ловушки. А в квантовом случае точной траектории нет, и вероятность становится неотъемлемым свойством эволюции квантового объекта. Казалось бы, квантовое и классическое описания должны совпадать в применении к объектам и процессам, которые с точностью до соотношения неопределенностей близки друг к другу. Но на самом деле это не так.

Ортодоксальная квантовая механика строится как теория полностью обратимых процессов, но только "между измерениями". В ней нет понятия классического тела и нет описания процессов взаимодействия микро- и макротел. Сила квантовой механики заключается в том, что она универсально описывает все явления, но только в рамках обратимых процессов. Именно в последнем и состоит ее слабость, поскольку процесс измерения является для нее внешним явлением, не входящим в круг теории. Исходя из рис. 7, можно видеть, в каком направлении следует расширять теорию.

Будем удалять прибор  $P$  дальше и дальше от ядра  $R$ , устремляя  $L \rightarrow \infty$ . Процесс коллапса  $\psi$ -функции вблизи ядра от этого, очевидно, не изменится. Другими словами, распад ядра и соответствующий коллапс  $\psi$ -функции можно рассматривать как результат измерения, проводимого в далеком будущем. Если оставаться на позициях причинности, то влияние из будущего можно считать беспричинным случайным процессом. Итак, более общий взгляд на эволюцию квантовых систем должен сочетать причинное развитие событий в

соответствии с уравнением Шрёдингера и "беспричинные" коллапсы, представляющие собой результат "измерений в будущем". Как должны быть построены эти коллапсы, мы рассмотрим ниже.

## 25. Парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР)

На самой заре становления квантовой теории, в 1935 г., Эйнштейн, Подольский и Розен опубликовали статью [8], озаглавленную "Можно ли считать квантовомеханическое описание физической реальности полным?" Именно в ней авторы сформулировали свой знаменитый парадокс, который вызывал оживленные дискуссии, продолжающиеся вплоть до сего времени.

Эйнштейн, Подольский и Розен рассмотрели две квантовомеханические системы, которые некоторое время взаимодействуют между собой, а затем перестают взаимодействовать. Например, это могут быть две частицы, которые, провзаимодействовав на близком расстоянии, затем разлетаются далеко друг от друга. Если теперь производить измерения над первой системой, то для разных результатов измерений вторая система также оказывается в разных состояниях, описываемых разными волновыми функциями, хотя фактически никакого физического воздействия на вторую систему при этом не оказывается. Пару частиц с волновой функцией, не распадающейся на произведение функций каждой из частиц, называют обычно ЭПР-парой. Состояния, у которых волновая функция не распадается на произведения индивидуальных функций, были названы Шрёдингером "entangled states", т.е. "запутанные состояния". Наиболее точный перевод этого термина на русский язык звучит, вероятно, как "повязанные состояния". В таких состояниях имеется достаточно жесткая внутренняя корреляция. Именно вследствие этой корреляции измерение над одной частицей приводит к изменению волновой функции второй частицы, даже если вторая частица находится очень далеко от первой частицы. На первый взгляд это выглядит как абсолютно парадоксальная ситуация, свидетельствующая о наличии некоторого нелокального взаимодействия, или, как говорят, об "отсутствии локальной реальности".

Формальное разрешение этого парадокса было дано Бором почти сразу же после появления статьи Эйнштейна, Подольского и Розена. Оно состоит в том, что в квантовой механике нельзя говорить о состоянии безотносительно к окружению, в частности безотносительно к измерительным приборам. И если при измерении импульса одной частицы можно однозначно предсказать импульс второй



частицы, то это происходит именно в силу определенной конфигурации приборов. Точное знание импульса второй частицы получено при конкретном расположении измерительных приборов, и именно эта макроскопическая обстановка позволяет выявить внутренние корреляции в квантовой системе.

Однако такой подход к разрешению парадокса удовлетворял не всех, высказывались и другие идеи. Обсудим этот парадокс на более конкретном примере (рис. 8).

Пусть нестабильная частица  $R$  распадается на две частицы —  $M$ ,  $m$ . Это может быть распад возбужденной молекулы на два атома, или  $\alpha$ -распад радиоактивного ядра, либо распад типа оже-эффекта, когда возбужденный атом испускает электрон, а сам переходит в устойчивое состояние.

Если в начальном состоянии частица  $R$  покоилась, то вылетающие в противоположные стороны частицы  $M$ ,  $m$  имеют равные по величине и противоположные по направлению импульсы. Допустим, что прибор  $P$  измерил импульс  $p$  частицы  $m$ . Очевидно, что одновременно будет измерен и импульс частицы  $M$ , хотя расстояние между частицами может быть очень велико и прямое взаимодействие прибора на вторую частицу практически исключено. Измерение импульса частицы  $M$  превращает ее волновую функцию в широкий волновой пакет типа плоской волны с импульсом  $-p$  и амплитудой, медленно убывающей к краям пакета. Ясно, что теперь частица  $M$  не может уже двигаться по направлениям, указанным на рис. 8 штриховой и штрих-пунктирной линиями. Происходит реальный коллапс волновой функции частицы  $M$  к направлению, отмеченному сплошной линией. Если измерить теперь импульс частицы  $M$ , то он окажется равным  $-p$ . Но если мы попытаемся измерить координату частицы  $M$ , то соответствующий прибор уничтожит широкий волновой пакет, так как импульс частицы  $M$  будет нарушен. Можно сказать, что прибор  $P$  готовит начальное состояние волновой функции частицы  $M$ , а затем эта волновая функция эволюционирует в соответствии с уравнением Шрёдингера. Самое интересное состоит в том, что прибор осуществляет изменение волновой функции частицы  $M$  посредством влияния только на второго партнера ЭПР-пары, т.е. на волновую функцию частицы  $m$ .

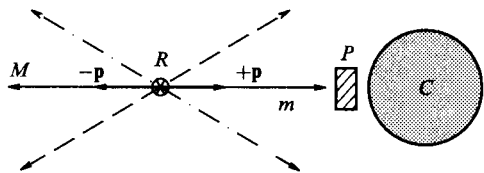


Рис. 8. Распад нестабильной молекулы  $R$  на две частицы с регистрацией частицы прибором  $P$ ;  $C$  — газовое облако.

Вернемся к рис. 8 еще раз. Если вместо квантовой системы у нас был бы "классический имитатор", то соответствующий коллапс был бы совершенно очевиден и естествен. В самом деле, сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии относились бы к разным случайным событиям. Их вероятности могли бы быть совершенно одинаковыми, и тогда регистрация частицы  $m$  прибором  $P$  означала бы, что в данном акте измерения произошло именно то событие, которое может регистрироваться прибором  $P$ . Такой прибор получил бы информацию  $I = -\sum_i p_i \ln p_i$ , а вероятности  $p_i$  сколлапсировали бы в единицу для сплошной линии и уничтожились бы во всех других состояниях. Этот необратимый процесс измерения, как мы видели ранее, должен сопровождаться необратимыми процессами восприятия, так что суммарная энтропия системы частица плюс прибор не может убывать.

Но как мы видели ранее, широкие квантовые пакеты ведут себя практически как локализованные частицы. Поэтому и картина рис. 8 не должна уж очень сильно отличаться от "классического имитатора". Рассмотрим случай, когда масса легкой частицы  $m$  значительно меньше массы тяжелой частицы  $M$ . Тогда скорость легкой частицы будет значительно больше скорости тяжелой частицы, так что именно она первой попадает во внешний мир. Уберем прибор  $P$  и заменим его на газовое облако  $C$ . Попадая в это облако, легкая частица "самоизмеряется", становясь участником неравновесного процесса. Можно сказать так: отдельные волновые пакеты легкой частицы теряют взаимную когерентность из-за взаимодействия с облаком  $C$ , и первоначально чистое состояние легкой частицы становится смешанным. Энтропия частицы возрастает от нуля до  $S = -\sum_i p_i \ln p_i$ , где  $p_i$  — вероятности некогерентных пакетов,  $i$  — номер пакета. В силу корреляции между  $M$  и  $m$  то же самое происходит с тяжелой частицей: она теряет "чистоту" своего состояния и приобретает ту же самую энтропию  $S$ . Если теперь в облаке произойдет необратимый процесс коллапса, например за счет энергии самой частицы  $m$ , то вероятности  $p_i$  сколлапсируют, так что останется только одно состояние с вероятностью, равной единице. Одновременно происходит коллапс волновой функции частицы  $M$ . Можно сказать, что такой коллапс является прямым следствием запрета "состояния кота Шрёдингера": не может существовать суперпозиции состояний, относящихся к существенно разным сценариям развития истории, т.е. эволюции неравновесного мира. Следует еще раз подчеркнуть, что коллапс волновой функции связан именно с соприкосновением (прямым или косвенным) квантового объекта с внешним миром.

Макроскопические изолированные системы с низким уровнем тепловых шумов также могут проявлять квантовые свойства. Такие объекты называют иногда чисто жаргонно "квантовыми котами" [25, 26]. Только их соприкосновение с классическим миром, например в виде диссипации, и может перевести их статистические свойства в русло классической логики [27, 28].

Итак, коллапс волновой функции — это скорее свойство окружения квантового объекта, а не самого объекта: именно внешний мир превращает сначала  $|\psi\rangle^2$  в набор вероятностей  $p_i$ , а затем неравновесной эволюцией превращает их в набор из нулей и одной единицы для того состояния, в которое происходит коллапс. Коллапс — это случайный процесс типа "бросания костей". Именно он и остается "за кадром" в традиционном аппарате квантовой теории, являющейся теорией обратимых процессов. Чтобы учесть коллапсы, нужно явно дополнить уравнения эволюции соответствующими операторами, которые учитывали бы реальное необратимое развитие квантовых систем во времени. Как это можно сделать, мы увидим позднее.

## 26. Неравенства Белла

Квантовая теория стала привычным инструментом современной физики. Тем не менее остался некоторый "червь сомнения", который тревожит души теоретиков и экспериментаторов, и прямая проверка основных принципов волновой механики продолжает оставаться на повестке дня. В частности, остается желание исключить прямыми экспериментами альтернативную, но несостоятельную теорию скрытых параметров.

В 1965 г. Д. Белл опубликовал статью [29], в которой проблема скрытых параметров была рассмотрена с некоторой новой точки зрения. А именно, он показал, что предположение о существовании скрытых параметров, т.е. близкая к классическим представлениям гипотеза о статистике событий, позволяет получить ряд неравенств, которые не согласуются с квантовой теорией и могут быть прямо проверены в эксперименте. Мы познакомимся здесь только с самым простым примером неравенств Белла.

В его основе лежит анализ корреляционного эксперимента типа предложенного Эйнштейном, Подольским, Розеном, но в более простом варианте, рассмотренном Д. Бомом [30]. А именно, пусть молекула, находящаяся в синглетном состоянии, разлетается на два атома, каждый из которых имеет спин  $1/2$  (в единицах  $\hbar$ ). После распада, в силу закона сохранения момента импульса, общий момент обеих частиц по-прежнему будет равен нулю. Убедимся сначала, что

квантовый подход действительно приводит к парадоксу ЭПР. Если измерить проекцию  $\sigma_x$  момента импульса первой частицы на ось  $x$ , то вторая частица автоматически окажется в состоянии  $-\sigma_x$ . В классическом случае проекции спина второй частицы на другие оси, скажем,  $Y$  или  $Z$ , автоматически обратились бы в нуль. Но в квантовом случае это не так. Оператор  $\sigma_y$  не коммутирует с  $\sigma_x$ , а его собственные значения равны  $\pm 1/2$ . Поэтому измерения  $\sigma_y$  у второй частицы будут равны величине  $\pm 1/2$  с равной вероятностью.

Построим теперь одно из неравенств Белла. Допустим, что у второй частицы существуют одновременно все три компоненты спина, которые при измерениях могут давать величины  $\pm 1/2$ . Произведем теперь много измерений, получив ансамбль состояний. Обозначим через  $X^+$  случай, когда  $\sigma_x = 1/2$ , через  $X^-$  — случай, когда  $\sigma_x = -1/2$ , и т.д. Тогда получим

$$N(X^+, Y^-) = N(X^+, Y^-, Z^+) + N(X^+, Y^-, Z^-),$$

где  $N$  — число измерений в ансамбле со свойствами, обозначенными в круглых скобках. Аналогично получаем

$$N(Y^-, Z^+) = N(X^+, Y^-, Z^+) + N(X^-, Y^-, Z^+),$$

$$N(X^+, Z^-) = N(X^+, Y^+, Z^-) + N(X^+, Y^-, Z^-).$$

Из написанных выше трех соотношений, очевидно, следует

$$N(X^+, Y^-) \leq N(Y^-, Z^+) + N(X^+, Z^-). \quad (134)$$

Вернемся теперь к двум частицам, разлетающимся в синглетном состоянии, так что спины двух частиц в точности противоположны друг другу. Например, если первая частица имеет состояние  $X^-$ , то вторая будет иметь  $X^+$ . Соответственно, если мы заменим знаки у вторых (т.е. первых при прочтении справа налево) знаков внутри круглых скобок (134), то получим соотношение

$$n(X^+, Y^+) \leq n(Y^-, Z^+) + n(X^+, Z^+), \quad (135)$$

в котором  $n(X^+, Y^+)$  означает число пар частиц ансамбля, у которых первая частица имеет проекцию спина  $\sigma_x = +1/2$ , а вторая —  $\sigma_y = +1/2$ , и т.д. Соотношение (135) и представляет собой одно из неравенств Белла. Естественно, что таких соотношений можно написать не одно, а несколько. Они соответствуют допущению о наличии скрытых параметров и, соответственно, могут нарушаться в реальных

квантовых объектах в силу некоммутативности компонент спина. На простейших моделях пар частиц со спином  $1/2$  можно теоретически построить коррелированные состояния, в которых неравенства Белла заведомо нарушаются (более подробно с этими вопросами можно ознакомиться по книге Переса [146]).

Эксперименты, проведенные на различных квантовых объектах, показали, что неравенства Белла в самом деле нарушаются в соответствии с квантовой теорией. Мы упомянем здесь только два из этой серии экспериментов. В экспериментальной работе А. Аспекта с коллегами [31] изучались корреляции поляризации пар фотонов с помощью изменяющихся во времени анализаторов. Они переключались с темпом быстрее  $c/L$ , где  $c$  — скорость света,  $L$  — расстояние между детекторами. Результаты оказались в полном соответствии с квантовой механикой: корреляции существуют в любой момент времени и не переносятся каким-либо сигналом. Неравенства Белла исключались с надежностью в пять стандартных отклонений. А в самом последнем по времени эксперименте Т. Киса и др. [32] неравенства Белла нарушались с надежностью в 22 стандартных отклонения. Таким образом, эксперименты по нарушению неравенств Белла надежно подтверждают принцип квантовой механики и исключают "локальный реализм", т.е. существование скрытых параметров.

## 27. Квантовая криптография и телепортация

Парадокс ЭПР и связанные с ним неравенства Белла выглядят как своего рода нелокальные взаимодействия, т.е. бессилловые переносы информации на большое расстояние, возможно, даже со сверхсветовой скоростью. Поэтому в научной литературе не раз обсуждался вопрос о возможности создания "сверхсветового телеграфа". Нетрудно видеть, что в прямом варианте одиночной ЭПР-пары парадокс ЭПР для этой цели не подходит. В самом деле, измерение, проводимое над первой частицей, является чисто случайным и его невозможно заранее предсказать и контролировать. Ситуация здесь, хотя и отличается от классической, но в некотором смысле сходна с тем, как если бы черный и белый шары были спрятаны порознь в разные ящики, а ящики разнесены далеко друг от друга. Вскрытие первого из ящиков сразу показывает, какого цвета шар находится как в нем, так и во втором ящике. Никакой передачи информации здесь нет: это просто заранее известная корреляция вероятностей. Квантовый случай отличается лишь тем, что до открытия ящика шары не имеют цвета. Но как только мы открыли первый ящик и "засветили шар" (как это происходит с фотопластинкой), то сразу же у него появляется цвет,

а второй шар приобретает противоположный цвет внутри второго ящика. В квантовой механике со вторым шаром можно проводить и другие типы измерений с некоммутирующими операторами, но при определении "цвета" ничего другого, кроме цвета, противоположного цвету первого шара, обнаружить нельзя. Поскольку первое событие является чисто случайным, то корреляции одиночных ЭПР-пар нельзя напрямую использовать для мгновенной передачи информации (подробнее этот вопрос рассмотрен в разделе 44).

Однако ЭПР-корреляции оказались интересными с точки зрения их возможного использования для засекречивания (кодировки) передаваемых сообщений. Основная идея здесь базируется на том, что любое вмешательство в квантовую систему, скажем, типа "подслушивания", разрушает чистое состояние и поэтому не может остаться незамеченным при правильном использовании чистых состояний. Это направление получило название "квантовой криптографии" [33–36]. Мы познакомимся здесь только с двумя простейшими примерами квантовой криптографии. По-видимому, наиболее простой вариант квантовой криптографии предложен А. Экертом [33]. Он основан на неравенствах Белла. Два участника процесса передачи и приема информации должны приготовить много ЭПР-пар атомов со спином  $1/2$ , имеющих суммарный спин, равный нулю. Эти пары делятся попалам между действующими лицами, которые затем производят измерения спинов по согласованной программе так, чтобы нарушались неравенства Белла. Оказывается, что при соответствующем выборе программы измерений эти нарушения могут быть максимальными [37]. В данной схеме корреляционных экспериментов информация появляется в процессе измерений и ее нельзя "подслушать". А умышленное вмешательство третьего лица, не знающего программы измерений, легко обнаруживается.

Существуют и более прямые пути для квантовой кодировки информации без использования неравенств Белла [34, 35]. Один из наиболее интересных вариантов переноса квантовой информации был предложен Беннетом с соавторами [36]. Они назвали его телепортацией квантового состояния с помощью двойного, т.е. классического и ЭПР-канала. Термин "телепортация" авторы заимствовали из научной фантастики, где описывается процесс, когда личность или другой объект "рассыпаются" в одном месте, а полная информация об их структуре передается в другое место, где и собираются их точные копии.

В данном случае речь идет о следующем процессе. Вначале готовится синглетная ЭПР-пара тождественных частиц со спином  $1/2$  у каждой. Одна частица остается у отправителя информации, а вторая

отсылается получателю. Допустим теперь, что отправитель хочет телепортировать получателю третью частицу в неизвестном состоянии  $|\phi\rangle$  со спином  $1/2$ . Оказывается, что для этой цели ему достаточно произвести совместное измерение спина в двойной системе — первого партнера ЭПР-пары и третьей частицы. Для этого можно воспользоваться базисом Белла [37], содержащим четыре ортогональных состояния — одно синглетное и три триплетных (соответственно, со спином 0 и 1). Но и у трех частиц, т.е. ЭПР-пары и третьей частицы в неизвестном состоянии  $|\phi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ , полное число ортогональных состояний равно четырем, и их можно представить в виде суперпозиции некоторых собственных функций, содержащих амплитуды  $a$ ,  $b$ . После измерения классическую информацию об этих амплитудах отправитель может послать получателю, который сможет построить состояние  $|\phi\rangle$  простым поворотом прибора вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  относительно второго партнера ЭПР-пары.

## 28. Запутанные состояния

Работа Беннета с соавторами [36] открыла новую область исследований в квантовой теории. Чтобы познакомиться с ней более подробно, целесообразно стартовать именно с работы [36]. Речь идет фактически о параллельном использовании квантовой и классической информации для целей телепортации. Для этого вначале две коррелированные квантовые частицы со спином  $1/2$  приготавливаются в ЭПР-синглетном состоянии:

$$|\Psi_{23}^{(-)}\rangle = \frac{\sqrt{1}}{2} \{ |\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle \}.$$

Здесь использованы обозначения Дирака для квантовых состояний, а индексы 2, 3 относятся к соответствующим частицам ЭПР-пары. Квантовое состояние третьей частицы  $|\phi_3\rangle$  не известно ни отправителю  $A$ , ни получателю  $B$ , которые имеют намерение телепортировать это состояние от  $A$  к  $B$ .

Пусть частица 2 передается отправителю  $A$ , а частица 3 — получателю  $B$ . Исходное чистое состояние  $|\phi_1\rangle|\Psi_{23}^{(-)}\rangle$  не содержит никаких классических или квантовых корреляций (т.е. запутывания) между  $|\phi_1\rangle$  и  $|\Psi_{23}^{(-)}\rangle$ . Однако отправитель  $A$  может осуществить запутывание состояний частиц 1 и 2. Для этого над этими частицами следует произвести операцию измерения фон Неймана. Операцию измерения удобно произвести в базисе Белла [37], который составлен из четырех ортонормированных состояний:  $|\Psi_{12}^{(-)}\rangle$  и

функций

$$|\Psi_{12}^{(+)}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \{ |\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle \},$$

$$|\Phi_{12}^{(\pm)}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \{ |\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle \}.$$

Пусть неизвестное состояние первой частицы есть  $|\phi_1\rangle = a|\uparrow_1\rangle + b|\downarrow_1\rangle$ , где коэффициенты  $a, b$  удовлетворяют условию нормировки  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Тогда волновая функция начального состояния трех частиц будет равна

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle |\downarrow_3\rangle - |\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle |\uparrow_3\rangle \} + \\ + \frac{b}{\sqrt{2}} \{ |\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle |\downarrow_3\rangle - |\downarrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle |\uparrow_3\rangle \}.$$

В этом соотношении каждое прямое произведение  $|\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle$  может быть выражено через базисные векторы Белла, и тогда получается

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{1}{2} \{ |\Psi_{12}^{(-)}\rangle (-a|\uparrow_3\rangle - b|\downarrow_3\rangle) + |\Psi_{12}^{(+)}\rangle (-a|\uparrow_3\rangle + b|\downarrow_3\rangle) + \\ + |\Phi_{12}^{(-)}\rangle (a|\downarrow_3\rangle + b|\uparrow_3\rangle) + |\Phi_{12}^{(+)}\rangle (a|\downarrow_3\rangle - b|\uparrow_3\rangle) \}.$$

Все четыре состояния частиц 1, 2, 3 имеют равные вероятности при измерении, независимо от того, каково неизвестное состояние  $|\phi_1\rangle$ . Если измерения производятся только отправителем телепортации  $A$ , т.е. только над частицами 1, 2, то в результате измерения состояние третьей частицы будет спроектировано на одно из четырех состояний:

$$-|\phi_3\rangle = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle.$$

Как мы видим, при результате измерения  $\Psi_{12}^{(-)}$  третья частица оказывается в состоянии  $-|\phi_3\rangle$ , а при трех других результатах измерения состояние  $|\phi_3\rangle$  может быть получено, соответственно, поворотами на  $180^\circ$  вокруг осей  $z, x, y$ . Поэтому отправителю  $A$  квантового состояния  $|\phi_3\rangle$  достаточно лишь сообщить классическую информацию о том, какой именно из результатов измерения он получил. При этом ни отправитель, ни получатель информации не



знает, какое именно состояние  $|\phi\rangle$  телепортировано. Так как число состояний равно четырем, то необходимая классическая информация должна составлять два бита.

Подведем теперь некоторый итог. Чтобы осуществить телепортацию состояния  $|\phi\rangle$  из точки  $A$  в точку  $B$ , требуется сначала приготовить ЭПР-пару и послать одного из партнеров этой пары в точку  $A$ , а другого — в точку  $B$ . Затем из точки  $A$  требуется послать два бита информации, которые подскажут партнеру  $B$ , в какой системе координат второй партнер ЭПР-пары приобретает состояние  $|\phi\rangle$ . Разумеется, при таком процессе два бита классической информации теряются и превращаются в тепло. Теряется также та информация, которая содержалась в ЭПР-паре. А результат всей проведенной операции состоит просто в передаче состояния  $|\phi\rangle$  из точки  $A$  в точку  $B$ . Возникает вопрос, не проще ли было просто переслать состояние  $|\phi\rangle$  из точки  $A$  в точку  $B$ ?

Разумеется, прямая передача состояния  $|\phi\rangle$  из точки  $A$  в точку  $B$  выглядит проще. Однако у телепортации появляется новое качество, которое мы постараемся разъяснить. Но сначала нужно понять, с какими видами информации мы имеем дело.

Что касается классического бита информации, то она представляет собой ячейку с двумя возможными состояниями. Если из двух состояний фиксируется только одно, то создается один бит классической информации. Квантовая частица со спином  $1/2$  также имеет два возможных состояния, т.е. появляется некоторая аналогия между такой частицей и классической ячейкой памяти емкостью в один бит. Поэтому количество квантовой информации в состоянии  $|\phi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$  принято называть квантовым битом, или кубитом (qubit  $\equiv$  quantum bit). В отличие от классического бита, имеющего только одно из двух состояний, например,  $\uparrow$  или  $\downarrow$ , квантовый кубит может существовать в произвольной комплексной суперпозиции таких состояний.

ЭПР-пара частиц в синглетном состоянии также может находиться только в двух возможных состояниях. Это значит, что она имеет один кубит квантовой информации. Однако этот кубит приходится на два партнера ЭПР-пары, а партнеры могут быть разнесены на большое расстояние друг от друга. Чтобы также оттенить эту особенность квантовой информации такой пары, ее принято называть [38] забитом, т.е. квантовым битом запутанного состояния (в английской терминологии ebit  $\equiv$  entangled pair bit).

Итак, чтобы телепортировать один кубит квантовой информации, требуется истратить два классических бита и один забит квантовой информации. По количеству затраченной информации процесс

кажется не очень-то выигрышным. Однако он дает совершенно новое качество. Ведь речь идет в самом деле о телепортации. Можно представить себе, что вначале создается "линия связи", точнее "линия сборки", состоящая из множества ЭПР-пар. Затем с помощью одной лишь классической информации их точки  $A$  в точку  $B$  можно телепортировать множество квантовых состояний  $|\phi\rangle$ , с помощью которых некоторое многочастичное состояние может быть воспроизведено в точке  $B$  как копия оригинала в точке  $A$ . При этом ни отправитель информации, необходимой для телепортации, ни получатель этой информации не знают, какое именно состояние они телепортируют (разумеется, они могут договориться о том, какого вида состояние  $|\phi\rangle$  предполагается переслать из  $A$  в  $B$ , но конкретной величины  $|\phi\rangle$  они не знают). Сами ЭПР-пары направленной информации не передают: они используются лишь как вспомогательное средство, чтобы с помощью классической информации осуществить передачу квантовой информации.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какова мера квантовой информации в запутанном состоянии. Пусть состояние частиц  $A$  и  $B$  выглядит как

$$\Psi(A, B) = \cos \theta |\uparrow_A\rangle |\downarrow_B\rangle - \sin \theta |\downarrow_A\rangle |\uparrow_B\rangle. \quad (136)$$

Как видно из выражения, при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  волновая функция  $\Psi(A, B)$  превращается в простое произведение функции от одной частицы на функцию от второй частицы. Такие состояния не запутаны, так что соответствующая мера запутанности равна нулю. Максимальная запутанность достигается в синглетном состоянии, когда  $\theta = \pi/4$ . Естественно поэтому ввести такую меру запутанности, которая, как функция угла  $\theta$ , обращалась бы в нуль при  $\theta = 0; \pi/2$  и достигала бы максимума при  $\theta = \pi/4$ . Согласно [39] эта мера может быть выбрана в виде

$$E(\theta) = -\sin^2 \theta \log_2(\sin^2 \theta) - \cos^2 \theta \log_2(\cos^2 \theta). \quad (137)$$

Фактически это есть  $-\sum_j p_j \log_2 p_j$ , где  $p_j$  — вероятность соответствующего состояния (в нашем случае  $p_1 = \cos^2 \theta$ ,  $p_2 = \sin^2 \theta$ ). При определении  $E(\theta)$  использованы логарифмы при основании 2:  $\log_2 p_i$ . Нетрудно проверить, что максимум  $E(\theta)$  как функции угла  $\theta$  действительно достигается при  $\theta = \pi/4$ . Это значит, что максимальная величина запутанности состояний двух частиц со спином  $1/2$  достигается в синглетном состоянии. Величина  $E(\theta)$  в точке максимума равна единице, т.е. одному биту.

Как уже отмечалось ранее (см. формулу (6)), при использовании информационных соотношений в физике (а не в компьютерной технике) более удобным является определение величины информации по Шеннону (3) с использованием натуральных логарифмов. При этом величина информации измеряется не в битах, а в натах.

Понятие величины запутанности легко обобщается на более сложные квантовые системы [39]. Если, например, система  $A$ , имеющая набор  $N$  ортонормированных состояний  $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots, |\alpha_N\rangle$ , находится в запутанном состоянии с системой  $B$ , то в системе  $B$  можно найти такой набор ортонормированных состояний  $|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \dots, |\beta_N\rangle$ , что совместная волновая функция  $\Psi(A, B)$  систем  $A, B$  может быть представлена в виде

$$\Psi(A, B) = \sum_{i=1}^N c_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle, \quad (138)$$

где коэффициенты  $c_i$  можно считать действительными положительными числами (все фазовые множители вида  $\exp(i\alpha_j)$  могут быть внесены в функции  $|\alpha_i\rangle, |\beta_i\rangle$ ). Ясно, что  $c_i^2$  представляет собой вероятность  $p_i = c_i^2$  соответствующего состояния при измерении волновой функции  $\Psi(A, B)$ .

Представление  $\Psi(A, B)$  в виде суммы (138) называется разложением Шмидта (или полярной формой Шмидта). С точки зрения каждого из наблюдателей,  $A$  или  $B$ , запутанное состояние выглядит как смешанное состояние, описываемое матрицей плотности, получаемой с помощью взятия следа от совместной матрицы плотности чистого состояния по переменным другого наблюдателя:

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi(A, B)\rangle \langle \Psi(A, B)| = \sum_i c_i^2 |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i|.$$

Аналогичное соотношение имеет место для  $\rho_B$ .

Величина запутывания  $E$  чистого состояния  $\Psi(A, B)$  определяется как энтропия фон Неймана матриц плотности  $\rho_A$  или  $\rho_B$ , либо, что то же самое, как энтропия Шеннона для вероятностей  $p_i = c_i^2$ :

$$E = -\text{Tr} \rho_A \ln \rho_A = -\text{Tr} \rho_B \ln \rho_B = -\sum_i c_i^2 \ln c_i^2. \quad (139)$$

Величина  $E$  может изменяться в интервале от нуля (для незапутанных состояний,  $N = 1$ ) до максимального значения  $E_{\max} = \ln N$ .

Наличие запутанных состояний между системами  $A$  и  $B$  может рассматриваться как своего рода ресурс для информационных связей (как бы "линия связи"). Но забыты представляют собой более слабое

ресурсное обеспечение по сравнению с кубитами. Кубиты могут направленно пересылаться из  $A$  в  $B$  или из  $B$  в  $A$ .  $A$  забиты, т.е. биты запутывания, являются "имуществом совместного пользования". Самих по себе их недостаточно, чтобы пересылать кубиты информации. Чтобы переслать кубиты, забиты должны быть дополнены битами классической информации, чтобы осуществить процесс телепортации.

Если у наблюдателей  $A$  и  $B$  имеется достаточный запас стандартных синглетов, т.е. ресурс забитов, то они могут построить любое чистое запутанное состояние  $\Psi(A, B)$ , если воспользуются дополнительным ресурсом классических битов. Для этой цели наблюдатель  $A$  может вначале приготовить у себя копию  $\Psi(A, C)$  того состояния, которое он затем хотел бы видеть как  $\Psi(A, B)$ . Состояние  $\Psi(A, C)$  может быть приготовлено с помощью локальных операций. Затем с помощью стандартных общих синглетов совместно с классической информацией, наблюдатели  $A$  и  $B$  могут телепортировать состояние  $C$  в систему  $B$  и запутать его с состоянием  $B$ . В результате будет получено состояние  $\Psi(A, B)$ , а состояние  $C$  при этом разрушается. Такая телепортация требует  $\log_2 N$  синглетов и  $2 \log_2 N$  классических бит для коммуникации, где  $N$  — размерность Гильбертова пространства системы  $B$  [39].

В работе [39] показано, что перед телепортацией можно было бы увеличить запутанность телепортируемой системы  $C$ . Однако вопрос о компрессии запутанности выходит далеко за рамки основной линии данной книги. Читатели, интересующиеся этим вопросом, могут обратиться непосредственно к работе [39].

## 29. Квантовые вычисления

Идея квантовых вычислений была высказана в начале 80-х годов, но только в самые последние годы стали появляться экспериментальные возможности для их реализации [40]. Сама идея очень проста. Ведь в обычных классических компьютерах приходится иметь дело с ячейками памяти или элементами логики, которые содержат только один бит информации. Такая ячейка имеет только два состояния: 1 или 0. В квантовой механике имеется множество примеров систем с двумя состояниями или уровнями: поляризация света, направление спина частицы и т.д. Поэтому элементарное состояние, одиночное или выбранное из большего числа реализацией, всегда имеется под руками. Остается только продумать устройство, в котором с квантовыми состояниями можно было бы обращаться почти так же, как с битами в обычных компьютерах. В отличие от обычного бита,

квантовый бит информации получил название кубит (qubit — quantum bit). Один кубит можно представить себе как пару ортогональных состояний. Например, в случае поляризации фотонов состояние  $|0\rangle = |\leftrightarrow\rangle$ , а состояние  $|1\rangle = |\updownarrow\rangle$ . Два таких состояния похожи на классический бит информации. Однако у кубита имеется гораздо более богатый выбор возможностей. Например, можно представить себе суперпозиции вида

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |\nearrow\rangle \quad \text{и} \quad \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |\searrow\rangle.$$

Кроме того, пара кубитов может существовать в запутанном состоянии, таком, например, как синглетное состояние  $\Psi^- = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$ . При этом ни один из кубитов не находится в определенном состоянии. В общем виде можно представить себе очень много кубитов, находящихся в состоянии линейной суперпозиции с комплексными коэффициентами. Квантовый процессинг (processing) данными представляет собой набор унитарных преобразований, действующих на такого рода суперпозиции.

Соответственно, при обработке квантовой информации появляются следующие совершенно новые свойства:

суперпозиция: любые вычисления, производимые квантовым компьютером, представляют собой унитарные преобразования когерентных квантовых состояний;

интерференция: параллельные пути вычислений, подобно различным путям квантовой частицы, могут приводить либо к усилению, либо к ослаблению и даже уничтожению соответствующей амплитуды, в зависимости от набега соответствующих фаз;

запутанность: некоторые состояния квантовой системы могут не распадаться в произведения состояний ее частей;

неопределенность и неопируемость: неизвестное квантовое состояние не может быть точно скопировано (т.е. "клонировано" — вегетативно размножено) и подвергнуто наблюдению без риска разрушения.

В обычных компьютерах обработку информации можно представить в виде серии элементарных шагов. Каждый шаг состоит в переносе информации по проводам и элементарной логической операции, выполненной управляемыми логическими воротами (logic gate). Любые логические операции могут быть выполнены, если имеются ячейки "исключенного — ИЛИ" ( $\text{XOR} \equiv \text{exclusive — OR}$ ) или, что то же самое, "управляемого — НЕТ" (controlled — NOT). Такая ячейка использует два бита информации, причем первый из них

является управляющим: он переставляет значения второго, если сам равен единице. Операция НЕТ может быть представлена матрицей

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а управляющий бит может либо включать эту операцию (если он равен единице), либо пропускать второй бит без изменений (если управляющий бит равен нулю). Тем самым осуществляется действие "исключенного — ИЛИ".

В квантовом случае операция НЕТ выполняется той же самой матрицей, а операция ХОР переставляет значения второго из битов, если, и только если, значение первого бита равно единице. Другие возможные преобразования, например, поворот на  $45^\circ$ , описываемый матрицей

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

могут быть существенно неклассическими, поскольку они преобразуют булевские состояния в суперпозиции. На примере операции ХОР можно понять, почему квантовая информация, в отличие от классической, не может быть клонирована (т.е. скопирована). Пусть, например, второй кубит равен 0, а первый, т.е. управляющий, может быть равен либо 0, либо 1. При этом первый кубит остается неизменным, а второй становится копией первого:  $U_{\text{ХОР}}|x, 0\rangle = |x, x\rangle$  при  $x = 0$  или 1. В представлении поляризации это выглядит как  $U_{\text{ХОР}}|\leftrightarrow, \leftrightarrow\rangle = |\leftrightarrow, \leftrightarrow\rangle$  и  $U_{\text{ХОР}}|\downarrow, \leftrightarrow\rangle = |\downarrow, \downarrow\rangle$ . По наивности можно было бы предположить, что операция  $U_{\text{ХОР}}$  в применении к состоянию  $|\nearrow\rangle$  могла бы дать его копию, т.е.  $U_{\text{ХОР}}|\nearrow, \leftrightarrow\rangle$  было бы равно  $|\nearrow, \nearrow\rangle$ . Однако это не так. Унитарность оператора  $U_{\text{ХОР}}$  требует, чтобы суперпозиция входного состояния превращалась в аналогичную суперпозицию выходного состояния:  $U_{\text{ХОР}}|\nearrow, \leftrightarrow\rangle = (|\leftrightarrow, \leftrightarrow\rangle + |\downarrow, \downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ . Как видно, в результате получается запутанное состояние.

Тем не менее операции обработки информации в квантовом компьютере сходны с аналогичными операциями в классическом компьютере. Логические диаграммы квантового компьютера могут быть также представлены в виде совокупности логических блоков, или "ворот", соединенных между собой "проводами". При обработке квантовой информации ворота (gates) производят унитарные преобразования, а провода переносят кубиты без изменений. Оказывается, что для построения логических схем любой архитектуры достаточно

иметь ворота (gates) с одним или двумя кубитами [41–43]. Логические квантовые диаграммы должны включать в себя измерения, которые превращают квантовый вход в классический выход, а также шаги приготовления, в которых классический вход определяет, какие именно унитарные преобразования будут использоваться.

Что касается логических квантовых ворот, то их экспериментальная реализация была продемонстрирована совсем недавно [44, 45] (см. также [46, 47]). Как действуют такие ворота, проще всего разобрать на примере устройства [44], где использовался один единственный ион  $V^+$ , находящийся в радиочастотной ионной ловушке. Ионы настолько сильно охлаждены, что могут занимать только два осцилляторных уровня продольных колебаний в ловушке. Эти уровни, раздвинутые друг от друга на 11 МГц, служат двумя состояниями,  $|0_V\rangle$ ,  $|1_V\rangle$ , управляющего кубита. Управляемый кубит (target qubite) состоит из двух уровней,  $|0_H\rangle$ ,  $|1_H\rangle$  сверхтонкой структуры иона в основном состоянии. Расстояние между этими уровнями, равное 1250 МГц, лежит в радиодиапазоне, но в условиях эксперимента соответствующие переходы возбуждались двумя лазерами на частоте их биений.

Таким образом, два бита системы создаются четырьмя уровнями:  $|0_V\rangle|0_H\rangle$ ,  $|1_V\rangle|0_H\rangle$ ,  $|0_V\rangle|1_H\rangle$  и  $|1_V\rangle|1_H\rangle$ . Если лазеры настроить точно на частоту 1250 ГГц, то переходы между двумя уровнями сверхтонкой структуры не затронут осцилляторные уровни. Но если эту частоту сдвинуть вверх или вниз на 11 МГц, то переходы между сверхтонкими и осцилляторными уровнями будут происходить одновременно. Подбором частоты и длительности импульсов можно осуществить операцию квантовой ячейки в режиме "управляемого — НЕТ" (более подробный анализ функционирования такой ячейки имеется в статьях [44, 47]).

Эксперименты [44] показали, что такая ячейка может работать с эффективностью около 90 %. Этого вполне достаточно для первой демонстрации эффекта, но для его практического использования потребуется еще большая дополнительная работа.

Квантовые компьютеры, использующие большие квантовые регистры в состояниях суперпозиции, могут представлять интерес для решения задач, где требуется иметь огромный параллелизм. Например, как было показано Шором [48], идеальный квантовый компьютер может весьма эффективно использоваться для разбиения больших целых чисел на множители. Идея нахождения делителя большого числа может быть изложена следующим образом.

Шор показал, что проблема разбиения на множители большого числа  $N$  может быть сведена к проблеме нахождения периода некоторой периодической функции  $f(x)$ . А для нахождения этого

периода может быть использован квантовый компьютер. Пусть такой компьютер имеет два квантовых регистра  $X, Y$ .  $X$ -регистр используется для аргументов  $x$  периодической функции  $f(x)$  с предполагаемым периодом  $r$ , а  $Y$ -регистр — для самой функции  $f(x)$ .  $X$ -регистр выбирается таким образом, чтобы число его возможных булевских состояний,  $Q = 2^w$ , было гораздо больше, чем  $r^2$ . Начальное состояние квантовых регистров создается в самом простом виде  $|x, y\rangle = |0, 0\rangle$ . На первой стадии квантовых вычислений регистр  $X$  переводится в однородную суперпозицию всех  $Q$  булевских состояний. Для этого каждый из  $w$  кубитов поворачивается индивидуально на  $45^\circ$ . В результате получится суперпозиция

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_x |x, 0\rangle.$$

Величина  $y$  пока равна нулю.

Далее, параллельной обратимой классической вычислительной операцией  $Y$ -регистр заполняется значениями  $f(x)$ . Хотя соответствующая операция может быть классической, она должна выполняться квантовым компьютером, чтобы упомянутая выше суперпозиция превратилась в суперпозицию вида

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_x |x, f(x)\rangle.$$

Мы получаем суперпозицию графиков периодической функции  $f(x)$ . Так как по предположению  $r < \sqrt{Q}$ , то каждый график содержит не менее  $\sqrt{Q}$  полных периодов. На следующем этапе над  $X$ -регистром совершается дискретное фурье-преобразование, которое дает суперпозицию

$$\frac{1}{Q} \sum_{x,k} \exp \frac{2\pi i k x}{Q} |k, f(x)\rangle.$$

Такая суперпозиция включает члены с различными значениями  $y$ , но все значения  $x$  концентрируются строго около целочисленных значений основной частоты  $Q/r$  (соответствующий эффект сходен с интерференцией света на оптической решетке). Если теперь классически измерить состояние в  $X$ -регистре, то число  $k$  окажется очень близким к целочисленному значению от фундаментальной частоты  $Q/r$ . Далее  $r$  может быть найдено как числитель ближайшего рационального приближения к  $Q/k$  со знаменателем меньшим, чем  $\sqrt{Q}$ .



Все шаги, кроме самого последнего, представляют собой унитарные преобразования, которые могут производиться квантовым компьютером, собранным из элементарных квантовых логических ячеек. Однако число соответствующих ячеек очень велико, даже при не очень больших числах  $N$ . Поэтому практическая реализация вычислительных программ, выполняемых квантовыми компьютерами, вызывает большие сомнения [49, 50]. Дело в том, что при большом числе ячеек происходит фактически переход к непрерывному спектру, когда квантовая система становится исключительно чувствительной к любым процессам декогерентности. Не исключено, что на пути к квантовому компьютеру придется прежде всего встретиться с изучением самих механизмов декогерентности, что может представлять собой самостоятельный интерес.

## СЛУЧАЙНОСТЬ И НЕОБРАТИМОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Данная глава начинается с введения понятия случайной волновой функции (раздел 30). Это понятие является центральным для всех последующих рассуждений. Оно предполагает фактически, что волновая функция является не физическим полем, а имеет чисто информационный характер. Она похожа в какой-то мере на вероятность: подобно вероятности  $\psi$ -функция может скачком меняться при соприкосновении с классическим окружением. Некоторые из компонент  $\psi$ -функции могут целиком уничтожаться, так что происходит ее коллапс в одну из возможных компонент. Этот процесс имеет объективный характер и никак не связан с разумным наблюдателем.

Можно сказать, что уравнение Шрёдингера описывает только половину квантовых процессов — временную эволюцию намерений квантовых систем. Вторая половина процессов — коллапсы волновых функций — должна описываться другими уравнениями.

В разделе 30 показано, что в качестве такого уравнения можно принять уравнение типа Ланжевена непосредственно для случайной волновой функции. У этого уравнения, разумеется, сохраняется некоторое сходство с уравнением Шрёдингера.

В разделах 31–32 обсуждается вопрос о коллапсах волновых функций на самых простых примерах. А затем, после краткого экскурса к классическому молекулярному хаосу, проводится обсуждение необратимости процессов в газе, приводящее в конце концов к подробному рассмотрению квантового хаоса в разреженном газе.

Описание квантового хаоса в газе проводится в терминах волновых пакетов. Показано, как процессы внутренних измерений, или самоизмерений, приводят к тому, что волновые функции атомов газа превращаются в волновые пакеты. Парные столкновения атомов сами собой устанавливают и поддерживают форму волновых пакетов.

Если в газ квантовых частиц помещена тяжелая квантовая частица, то такая частица испытывает броуновское движение. Такое движение оказывается удобным описывать в представлении Шрёдингера, т.е. в терминах случайной волновой функции. Соответствующее уравнение

опять выглядит как уравнение типа Ланжевена. Рассмотрение поведения тяжелой броуновской частицы позволяет описать два интересных эффекта. Это, во-первых, измерение, т.е. коллапс произвольной начальной волновой функции в волновой пакет. А во-вторых, — это появление элементов классического поведения у тяжелой частицы. Как показано в разделе 37, последовательные столкновения атомов газа с броуновской частицей приводят к монотонному сужению ее волнового пакета. В конце концов пакет становится настолько узким, что такую частицу можно описывать классически. Отсюда видно, что классические тела появляются в квантовой теории как результат их мониторинга окружающей средой.

В этой же главе предложены кинетические уравнения для амплитуд, а не для их квадратов — аналога матрицы плотности. Кинетическое уравнение для амплитуд сохраняет гораздо больше информации о волновых функциях, чем аналогичные уравнения для функции распределения или матрицы плотности.

### 30. Случайная волновая функция

Рассмотрим теперь несколько более сложный мысленный эксперимент, с помощью которого мы в крайне упрощенной форме познакомимся с эволюцией квантовой системы, находящейся в постоянной информационной связи с внешним миром. А именно, мы предположим, что квантовая частица подвергается "измерению" не с помощью приборов, а вследствие взаимодействия с неравновесным окружением. Соответствующая схема эксперимента представлена на рис. 9.

Пусть микрочастица с массой  $m$  заключена между двумя горизонтальными стенками, находящимися при нескольких различных температурах:  $T_1 \neq T_2$ . Тогда, сталкиваясь поочередно с верхней и нижней стенками, частица при неупругом взаимодействии может переносить порции тепла от

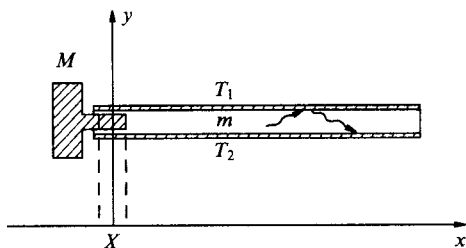


Рис. 9. Микрочастица  $m$ , двигаясь вдоль оси  $y$ , поочередно неупруго сталкивается со стенками сосуда. Температура верхней стенки  $T_1$  не совпадает с температурой нижней стенки  $T_2$ , и частица переносит, в среднем, тепло от одной стенки к другой. В левый торец сосуда входит "пробка" макроскопического тела  $M$ , так что при перемещении вдоль  $x$  микрочастица имеет возможность сталкиваться с макротелом.

горячей стенки к холодной. В холодной стенке каждая такая порция распространяется в толщу материала стенки и может быть там "измерена". Более точно, такая порция тепла чем-то сходна с радиоактивным распадом, так что она естественным образом может коллапсировать: можно сказать, что она "измеряется из будущего". Коллапс каждой из порций тепла приводит к коллапсу  $\psi$ -функции микрочастицы, и, соответственно, движение частицы вдоль оси  $x$  можно рассматривать как последовательность случайных коллапсов.

Поскольку взаимодействие частицы со стенками носит случайный характер, то и  $\psi$ -функция становится случайной. Для ее описания можно развить соответствующие строгие методы статистической физики, но в данный момент более целесообразно сосредоточиться на качественной картине явления. Поэтому мы пойдем на существенные упрощения, описывая  $\psi$ -функцию только ее моментами, т.е. усредненными значениями для положения волнового пакета  $\langle x \rangle$ , его ширины  $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$  и скорости  $v = \langle p \rangle / m$ , где  $p$  — импульс, а угловые скобки означают усреднение с весом  $|\psi|^2$ .

Допустим, что сразу после неупругого столкновения со стенкой волновая функция имеет вид локализованного пакета (59) с импульсом  $p = u/m$ :

$$\psi_0 = (\pi b^2)^{1/4} \exp\left(ikx' - \frac{x'^2}{2b^2}\right), \quad (140)$$

где  $k = u/\hbar m$ ,  $x' = x - \xi$  ( $\xi$  — координата "центра тяжести" пакета),  $b^2 = \langle (x')^2 \rangle$  — ширина пакета, начальный момент времени принят за нуль. В последующие моменты времени волновая функция будет эволюционировать, так что соответствующий пакет будет расплываться согласно формулам (60), (61), а именно,

$$\psi_t(x, t) = \exp(-i\omega t + ikx')\psi_{0t}(x' - ut, t), \quad (141)$$

где  $\omega = \hbar k^2/2m$ , а функция  $\psi_{0t}(x', t)$  дается соотношением (60), т.е.

$$\psi_{0t} = \left(\frac{b^2}{\pi a^4}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x'^2}{2a^2}\right),$$

где  $a^2 = b^2 + i(\hbar/m)t$ . Согласно (61) ширина пакета возрастает как

$$\langle x'^2 \rangle = b^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b^2}. \quad (142)$$

Пусть  $\tau$  есть среднее время между последовательными "измерениями". Тогда в среднем ширина пакета перед столкновением со стенкой будет определяться соотношением (142) при  $t = \tau$ . Квадрат ширины локализации волнового пакета  $b^2$  сразу после неупругого столкновения с холодной стенкой определяется процессами "измерения" порций тепла, которые происходят в самой стенке. А величина среднего времени  $\tau$  пропорциональна расстоянию между стенками и является свободным параметром. Она может быть выбрана таким образом, чтобы второе слагаемое в (142) было много больше первого. Другими словами, широкий волновой пакет после "измерения" сжимается до размеров, много меньших его ширины на подлете. Обозначим через  $a_0^2$  величину (142) при  $t = \tau$ , т.е. непосредственно перед неупругим ударом. Усредняя (142) по времени между ударами, можно определить среднее значение  $\bar{a}^2 = (a_0^2 + 2b^2)/3$ . Таким образом, волновой пакет осциллирует по ширине между  $b^2$  и  $a_0^2$ , имея средний квадрат ширины  $\bar{a}^2$ .

Между двумя последовательными ударами волновой пакет в среднем смещается на величину  $\Delta\xi = u\tau$ . Если считать, что скорости  $u$  имеют максвелловское распределение с температурой  $T = (T_1 + T_2)/2$ , то среднее значение для квадрата смещения по  $\xi$  перед вторым ударом будет равно  $T\tau^2/m$ . Смещения за счет расширения пакета и его свободного перемещения статистически независимы друг от друга, так что для вероятности  $p(\xi, t)$  положения  $\xi$  волнового пакета получаем уравнение диффузии

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}, \quad D = \frac{1}{2\tau} \left( a_0^2 + \frac{T\tau^2}{m} \right). \quad (143)$$

Итак, случайное блуждание квантовой частицы можно рассматривать как диффузию волнового пакета с вероятностью распределения  $p(t, \xi)$  его центра тяжести, эволюция которой определяется уравнением (143). Распределение по скорости  $v$  можно считать максвелловским, а квадрат ширины  $\langle x'^2 \rangle$  периодически то сжимается до  $b^2$  после удара, то расширяется до величины  $a_0^2$  перед следующим ударом.

Теперь рассмотрим, как такая случайно движущаяся квантовая частица взаимодействует с макроскопическим телом с массой  $M$ . Пусть волновая функция макротела равна  $\Psi(X)$ , где  $X$  — координата правой границы тела, о которую может ударяться частица. До взаимодействия с частицей волновую функцию  $\Psi(X)$  можно считать стационарной, поскольку при  $M \gg m$  квантовым расплыванием  $\Psi(X)$  можно пренебречь. При своем движении вдоль сосуда микрочастица рано или поздно столкнется с макротелом и, отразившись от него,

полетит вправо. Так как координата макротела не определена, то мы получим суперпозицию волновых пакетов.

Пусть  $\Psi(X)$  локализована вблизи  $X \cong 0$ , как показано на рис. 9. Нетрудно видеть, что при  $X > 0$  отраженный пакет окажется несколько правее, а при  $X < 0$  несколько левее по сравнению с отраженным от границы  $X = 0$ . Таким образом, после отражения точка  $x - X < 0$  переходит в положение  $x' = -x + 2X > 0$ , и волновая функция примет вид

$$\Psi(X)\psi(-x + 2X, t), \quad (144)$$

где  $\psi$ -функция микрочастицы дается выражением (141). Другими словами, в рассматриваемом приближении та часть волнового пакета, которая при свободном движении оказалась бы за поверхностью тела, т.е. при  $x - X < 0$ , просто зеркально отражается от плоскости  $X$  и оказывается в точке  $X - (x - X) = 2X - x$ .

Перед последующим ударом о стенку термостата волновая функция микрочастицы выглядит как волновой пакет (60). Однако сразу после удара она локализуется в узкий волновой пакет с квадратом ширины, равным  $b^2$ . При этом никакой суперпозиции разных волновых пакетов быть не может: "измерение" оставляет только один пакет, уничтожая все другие составные части  $\psi$ -функции. Происходит реальный коллапс волновой функции. Координата макротела  $X$  при этом будет также измерена с точностью до  $a_0$ : после удара с "измерением" координата микрочастицы  $x$  зафиксируется с точностью до  $b$ , так что в волновой функции (144) сомножитель  $\Psi(X)$  также сколлапсирует, и величина  $\langle (X - \text{const})^2 \rangle = a_0^2$ , т.е. координата  $X$  "измерится" и станет равной  $X \cong X_0 = \text{const}$  с точностью до  $a_0/2$ .

Схема на рис. 9 является, по существу, схемой косвенного измерения координаты макротела. После каждого такого косвенного измерения начальная функция  $\Psi(X)$  коллапсирует в пакет шириной меньше  $a_0/2$ . Величина  $|\Psi(X)|^2$  до коллапса принимает на себя роль классической плотности вероятности распределения средних значений координаты  $X$  для каждого из локализованных волновых пакетов, которые случайным образом порождаются столкновениями легкой частицы с горизонтальной стенкой.

Рассмотренный нами мысленный эксперимент указывает путь к теории описания явлений с естественно развивающимися процессами коллапса волновых функций. Во-первых, случайное "вторжение" коллапсов в эволюцию системы во времени показывает, что основную роль начинают играть не квазистационарные состояния, а расплывающиеся во времени волновые пакеты. Эти пакеты кроме квантовомеханических свойств приобретают черты протяженных

классических объектов, так что для них естественно использовать смесь классического и квантового описаний. Естественно возникающая некогерентность состояний придает макротелам привычный характер точно детерминированного поведения и "наводит мосты" между классическим макромиром и квантовым микромиром.

У читателя, естественно, может возникнуть вопрос: зачем нам понадобилось считать  $T_1 \neq T_2$ ? Казалось бы, и обычный термостат должен разрушать квантовую когерентность и создавать смешанные состояния типа волновых пакетов из любого чистого состояния. На самом деле, это скорее вопрос не реального поведения, а логического обоснования. И при  $T_1 = T_2$  у нас есть основания говорить об отсутствии когерентности, но мы не можем пока с достоверностью утверждать, что эта некогерентность сопровождается "измерением" и коллапсом волновых функций. Случайные процессы коллапсирования более естественны для термодинамически неравновесных систем, но как мы увидим позднее, они происходят и при термодинамическом равновесии.

Впрочем, к этому вопросу нам придется еще не раз возвращаться. А сейчас рассмотрим более подробно, как можно описывать эволюцию случайной волновой функции. Пусть  $\psi(x, t)$  — случайная волновая функция, описывающая одномерное движение частицы при наличии случайных измерений. Временная эволюция  $\psi$  может быть описана уравнением

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi + M\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + M(\psi)\psi. \quad (145)$$

Здесь  $M$  — случайный оператор "измерения". Будем считать, что  $M$  "вмешивается" в эволюцию системы по закону случая, т.е. в соответствии с распределением Пуассона со средним интервалом времени между "измерениями"  $\Delta t = \tau$ . Пусть сразу же после "измерения", которому мы припишем  $t = 0$ , функция  $\psi$  коллапсирует в пакет (140). Так как этот пакет содержит два параметра  $u, \xi$ , то в определение оператора  $M$  должна входить инструкция, как этими параметрами следует распорядиться. Перед следующим ударом решение  $\psi$  имеет вид (141), т.е.  $\psi_t = \exp(-iHt/\hbar)\psi_0$ , где  $t$  отсчитывается от предыдущего удара. Мы условились считать  $b \ll a$ , так что приближенно можно положить

$$p(u, u', \xi, t) = p(u, u') |\psi_t(x = \xi)|^2. \quad (146)$$

Здесь  $p(u, u', \xi, t)$  — распределение вероятностей для величин  $u, \xi$  в том случае, если повторный удар происходит через интервал времени  $t$

после первого;  $p(u, u')$  — вероятность изменения скорости пакета от значения  $u'$  перед "измерением" до значения  $u$  после "измерения". В частном случае полного "забывания" величины скорости перед "измерением" вероятность  $p(u, u')$  не зависит от  $u'$ , так что величина  $p(u, u') = p(u)$  имеет максвелловское распределение с температурой  $T$ . Если повторных "измерений" много, то величину вероятности перехода можно усреднить по времени:

$$p(u, u', \xi) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) p(u, u', \xi, t) \frac{dt}{\tau}. \quad (147)$$

Здесь первый множитель под интегралом показывает вероятность отсутствия удара до момента  $t$ , а величина  $dt/\tau$  равна вероятности "измерения" на интервале  $dt$ . Если мы переходим к усредненной по времени вероятности, то число ударов за время  $\Delta t$  следует считать равным  $\Delta t/\tau$ . Таким образом, предлагаемая логика автоматически приводит к классической цепи Маркова, а квантовый подход понадобился лишь для нахождения вероятностей перехода от одного "измерения" к другому. В итоге, для многих последовательных измерений мы получаем диффузионное уравнение (143) для  $p(\xi, t)$  с Максвелловским распределением частицы по скоростям. От этих вероятностей можно было бы перейти к матрице плотности  $\rho(x, x') = \langle \psi^*(x) \psi(x') \rangle$ . Но как мы видим, в этом нет большой нужды. Найденные нами усредненные волновые пакеты, которые входят в выражение (147), играют роль базиса, в котором матрица плотности имеет диагональный вид:  $\rho(x, x')$  представляет собой случайную выборку одного из таких пакетов с вероятностью, которая предписывается извне оператором измерения  $M(\psi)$ . В результате для описания статистических свойств случайной волновой функции основную роль играют именно свойства "измерения", а свободный пролет частицы от одного "измерения" до другого "измерения" определяет лишь величину коэффициента диффузии  $D$ .

Рассмотрим еще раз, как действует оператор  $M(\psi)$  в правой части уравнения (145). Как мы установили выше, перед его воздействием волновая функция выглядит как сравнительно широкий волновой пакет шириной  $\sim a_0$ . А сразу же после измерения образуется пакет шириной  $\sim b \ll a_0$ . Таким образом,  $|\psi|^2$  перед измерением имеет величину  $\sim 1/a_0$ , а после измерения  $\sim 1/b$ . Картина выглядит так, как если бы волновой пакет шириной  $\sim a_0$  был нарезан на дольки шириной  $b$ . Число таких долек  $a_0/b$ . При каждом измерении частица попадает только в одну из долек, и поэтому квадрат волновой функции увеличивается в  $a_0/b$  раз. Таким образом, оператор  $M(\psi)$  оказывается



сильно нелинейным: он уничтожает волновую функцию во всех ячейках, кроме одной, а в этой последней он увеличивает амплитуду в  $(a_0/b)^{1/2}$ . Это есть естественное следствие коллапса при сохранении нормировки. Но оказывается, что с матрицей плотности, и, в частности, с  $\rho(x, x) = |\psi(x)|^2$ , изменения происходят (если и происходят) гораздо менее впечатляющие. Действительно, требуется, по крайней мере,  $a_0/b$  измерений, чтобы частица по одному разу попала в каждую из долек, полученных "нарезанием" исходного пакета. Поэтому средняя по числу измерений  $a_0/b$  вероятность попасть частице в данную дольку оказывается примерно такой же, что и у исходного пакета. А если учесть, что вероятность данного "измерения" мы условились считать пропорциональной  $|\psi_t(x)|^2$ , то она оказывается практически такой же, как и после измерения.

Теперь мы видим, что оператор  $M(\psi)$  по отношению к его действию на  $\psi_t$  мало чем отличается от макроскопического прибора: он осуществляет коллапс волновой функции по правилам теории измерений квантовой механики, т.е. в одно из взаимно ортогональных состояний. Если трактовать эти измерения в терминах превращения чистого ансамбля в смешанный, то нетрудно видеть, что матрица плотности  $\rho(x, x')$  изменяется при таких измерениях очень мало. В самом деле, осциллирующая зависимость от  $x - x'$  матрицы плотности определяется, в основном, не размерами волновых пакетов, а максвелловским распределением по импульсам. Поэтому описание смешанного состояния в терминах матрицы плотности не является достаточно чувствительным, чтобы определить, происходят ли в самом деле коллапсы: усреднение по ансамблю легко уничтожает соответствующую очень "деликатную" информацию.

Для описания "измерений", приводящих к разрушению когерентности и "коллапсу" волновой функции, требуются более аккуратные подходы, в которых соответствующие процессы описываются явным образом.

Как известно из квантовой теории, универсальных измерений нет: какие именно физические величины будут измерены и каким собственным векторам они соответствуют, целиком зависит от устройства прибора, точнее, от макроскопических условий измерительного процесса.

Мы рассмотрим здесь еще один конкретный пример естественно протекающего процесса измерения, а именно, радиоактивный распад. При  $\alpha$ -распаде радиоактивного ядра волновая функция  $\alpha$ -частицы состоит из двух частей: локализованной вблизи ядра функции, убывающей со временем как  $\exp(-t/2\tau)$ , и стационарной функции снаружи от ядра, описывающей ее поток в бесконечно удаленные

области. Факт распада можно описывать случайным оператором "измерения"  $M(\psi)$ . На этот раз оператор  $M(\psi)$  должен по закону случая выбрать некоторый луч, выходящий из ядра, и создать на нем волновой пакет, убегаящий вдоль луча со скоростью испускаемой  $\alpha$ -частицы. Действие оператора  $M(\psi)$  можно условно рассматривать как результат измерения, произведенного в бесконечности и, стало быть, в бесконечно будущем. А в уравнении Шрёдингера он появляется как случайный коллапс волновой функции. Нетрудно опять установить, что сам коллапс представляет собой сильно нелинейный процесс, происходящий по закону случая, но если рассматривать только величину  $|\psi|^2$  как представителя плотности вероятности ансамбля одинаковых систем, то соответствующие процессы выглядят как очень "мягкие", не меняющие среднего значения  $\langle |\psi|^2 \rangle$  по ансамблю.

### 31. Мезомир

Теперь мы можем обсудить, как устроен мезомир, т.е. область физических явлений между классическим макромиром и квантовым микромиром. Естественно стартовать с микромира, который является как бы базисом для описания всего остального круга явлений.

Квантовая теория сама по себе логична и замкнута. Для микрообъектов с любым числом частиц, включая квантованные поля, динамическое поведение описывается обобщенным уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (148)$$

где  $\psi$  — волновая функция всей системы, зависящая от большого числа координат, а оператор  $H$  — гамильтониан системы. Волновую функцию можно рассматривать как вектор в гильбертовом пространстве, поэтому ее называют иногда вектором состояния.

Уравнение Шрёдингера описывает эволюцию квантовой системы, стартуя с некоторого начального состояния и оканчиваясь на измерении, т.е. взаимодействии с макроприбором. Что же касается макроприбора, то он предполагается чисто классическим объектом и описывается в терминах классических переменных. Между двумя этими пределами и находится мезомир, понимание которого является совершенно необходимым, если мы хотим связать между собой два предела — микромир и макромир. Начнем обсуждение этого вопроса опять с мысленного эксперимента. А именно, пусть на поверхность твердого макротела нанесена "радиоактивная метка" (рис. 10а). Если

вылетающая из метки  $\alpha$ -частица "измерена" прибором, то тем самым измеряется и координата "у" поверхности макротела: после измерения можно с достоверностью утверждать, что радиоактивное ядро заведомо находилось в точке  $A_*$ , а не в другой возможной точке  $B_*$ . До измерения точки  $B_*$  и  $A_*$  могли быть эквивалентными либо по той причине, что волновая функция макротела имела в них одинаковую амплитуду (чистое состояние), либо просто потому, что внешнему наблюдателю не было известно, в какой из двух точек,  $A_*$  или  $B_*$ , реально находится метка. В первом случае измерение  $\alpha$ -частицы автоматически приводит к коллапсу волновой функции макротела, а во втором случае снимается "априорная" неопределенность в вероятности нахождения метки и "коллапсирует" вероятность, т.е. внешний мир получает информацию о положении метки. Заметим, что сама  $\alpha$ -частица могла бы вылетать вдоль любого из лучей, выходящих из точки  $A_*$ , но случайно был выбран луч, отмеченный на рис. 10а жирной стрелкой. Это означает, что у  $\alpha$ -частицы волновая функция коллапсирует на один из лучей.

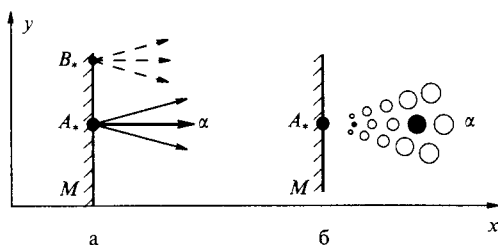


Рис. 10. Если на поверхности макроскопического тела нанесена радиоактивная метка  $A_*$ , то измерение вылетающей  $\alpha$ -частицы может быть использовано для измерения  $y$ -координаты макротела (штрихом на (а) показаны нереализованные траектории). При наличии внешних возмущений  $\psi$ -функция  $\alpha$ -частицы распадается на некогерентные волновые пакеты (б), из которых только один пакет является реальным — в него случайно "попадает"  $\alpha$ -частица.

Можно представить себе, что выбор одного из лучей произошел по той причине, что небольшие внешние возмущения несколько сбивают относительные фазы волновой функции на разных лучах, превращая их в "лучевые пакеты". Но если это так, то и вдоль луча может происходить процесс сбоя фазы, так что волновая функция  $\alpha$ -частицы вместо сферической волны, расходящейся из точки  $A_*$ , может превратиться в набор волновых пакетов, изображенных на рис. 10б. Сама частица может попасть только в один из этих пакетов (он на рис. 10б изображен черным кружком), а остальные пакеты — это всего лишь упущенные возможности для пребывания там частицы.

Нетрудно теперь убедиться, что такое представление и является правильным. В самом деле, если вернуться к формулам (130), (131), то можно еще раз установить, что квадраты амплитуд превращаются в

Нетрудно теперь убедиться, что такое представление и является правильным. В самом деле, если вернуться к формулам (130), (131), то можно еще раз установить, что квадраты амплитуд превращаются в

вероятности только при хаотизации разности фаз различных ортогональных состояний. Непересекающиеся волновые пакеты на рис. 10б как раз и представляют такие взаимно ортогональные состояния. Хаотизация фаз как бы разбивает когерентную волновую функцию на отдельные блоки, и величина  $|\psi|^2$  в каждом из таких блоков превращается в вероятность. С точки зрения перехода чистого состояния в смешанное хаотизация фаз является как бы очень слабо изменяющимся переходом: среднее значение  $|\psi|^2$  при этом нигде не меняется по величине и только превращается в вероятность, т.е. в априорную возможность. Частица может попасть только в одну из ячеек, т.е. в один из волновых пакетов, но для внешнего наблюдателя это еще не известно. И лишь реальное наблюдение приводит к коллапсу вероятности в одну из ячеек. По нашей предыдущей терминологии попадание частицы в ячейку — это всего лишь символ измерения, или "хинт", т.е. намек на то, что будущее измерение зафиксирует частицу именно в этой ячейке. Явление это скорее информационное, чем динамическое. Соответственно, для того чтобы "позметить" одну из ячеек как "ячейку с частицей", требуется только один бит информации.

Расположение ячеек (рис. 10б) и размеры этих ячеек во многом зависят от того, насколько интенсивны внешние возмущения, разрушающие когерентность чистого состояния. Но поскольку  $\psi$ -функция вылетающей из радиоактивного ядра частицы прогрессивно распространяется от ядра  $A_*$  в бесконечность, то в реальном мире разрушение когерентности все равно рано или поздно произойдет: если внешние возмущения уменьшать, то ячейки на рис. 10б просто удалятся вправо и станут крупнее. А сама частица рано или поздно все равно попадет в одну из ячеек, и тем самым объективно, т.е. независимо от наблюдателя, коллапс  $\psi$ -функции оказывается как бы осуществленным. Последующее измерение сколлапсирует всего лишь вероятность и тем самым подтвердит, что радиоактивный распад произошел и  $\alpha$ -частица летит вдоль одного из возможных лучей.

Коллапс волновой функции происходит лишь в один из волновых пакетов, в пределах которого фаза не сильно искажается. Поэтому сначала коллапс  $\psi$ -функции, а затем измерение  $|\psi|^2$  на сравнительно далеком от  $A_*$  расстоянии определяют (приблизительно) всю картину исходного вылета частицы из ядра и дальнейшего ее движения вдоль луча. Можно сказать, что коллапс волновой функции происходит сам собой, хотя более логично считать, что он создается "измерением" на очень большом расстоянии от ядра  $A_*$ . Теперь мы можем представить себе ситуацию, когда "измерение" отодвигается очень далеко, т.е.

практически бесконечно далеко, от  $A_*$ , и тогда коллапс  $\psi$ -функции можно рассматривать как результат измерения, проводимого на бесконечно большом расстоянии в бесконечно будущем времени.

Соответственно, можно сформулировать принцип коллапсирования. Он сходен с принципом излучения в электродинамике. Напомним, что при рассмотрении излучения электромагнитной волны периодическим диполем для получения однозначного решения приходится использовать краевое условие в виде отсутствия опережающей, т.е. приходящей из бесконечности, волны. Принцип этот не универсален: если излучение происходит в замкнутом резонаторе, то, безусловно, следует учитывать обе, уходящую и приходящую на излучатель, волны. Но в открытом пространстве опережающая волна считается отсутствующей, что эквивалентно наличию очень малого затухания волны, т.е. небольшой "затравочной" диссипации. "Отсекание" опережающей волны и делает решение однозначным.

Для квантовой частицы мы также должны наложить условие отсутствия приходящей из бесконечности волны. Но кроме того, мы можем допустить, что на бесконечности происходит "измерение", т.е. коллапс волновой функции. Этот удаленный коллапс приводит к коллапсу  $\psi$ -функции в волновой пакет на всем пути движения частицы вдоль луча, на котором эта частица оказалась. Так что результативно само измерение вроде как бы и не требуется.

Принцип коллапсирования мы можем распространить на все квантовые частицы, уходящие от макротел в бесконечность. Тем самым мы как бы утверждаем, что расходящаяся в бесконечность волновая функция не может быть реальным объектом, если эта функция соответствует одной единственной частице. Такая частица должна проявить себя при взаимодействии с внешним миром только в ограниченном объеме, поскольку она соответствует единой сущности.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда граница твердого тела освещается потоком света и отраженные от нее фотоны улетают на бесконечность (рис. 11).

Пусть вся поверхность этого тела зачернена, и только небольшой участок вблизи точки  $A_*$  является зеркальным. Этот участок вполне аналогичен радиоактивной метке: отражен-

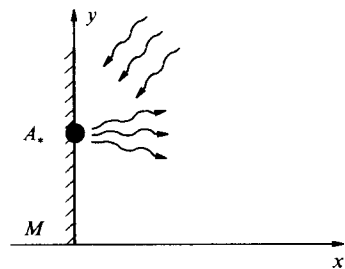


Рис. 11. На границе твердого тела  $M$  с черной поверхностью расположено небольшое зеркало  $A_*$ , отражающее фотоны. "Измерение" этих фотонов на бесконечности фиксирует координаты точки  $A_*$  с точностью до длины волны.

ные от него фотоны могут быть измерены на бесконечности, и внешнее окружение получит информацию о положении точки  $A_*$ . Соответственно, эта точка будет зафиксирована вне зависимости от того, было ли ее начальное положение неопределенным по классике (т.е. имело некоторое распределение вероятности положения), или оно было неопределенным из-за того, что макротело имело протяженную волновую функцию. В частности, измерительным прибором может служить глаз, и тогда картина выглядит так, как если бы сам наблюдатель осуществил коллапс волновой функции как фотона, так и макротела. Разумеется, коллапс в данном случае никак не связан с наблюдательными и интеллектуальными способностями человека: регистрация отраженного фотона любым прибором приводит в точности к тому же эффекту. Более того, участие этого фотона в любом необратимом процессе, происходящем сколь угодно далеко от  $A_*$ , можно рассматривать как "измерение", которое сопровождается коллапсом волновой функции.

Допустим теперь, что зеркало  $A_*$  фактически является стрелкой прибора, так что разным координатам  $y_i$  положения  $A_*$  на поверхности тела соответствуют разные величины  $u_i$  некоторого физического объекта  $U$ . Если объект  $U$  квантовый, то и величины  $u_i$  могут принимать некоторые дискретные значения. Соответственно, отраженные от  $A_*$  фотоны, которые могут быть "измерены" где-то на далеком расстоянии от  $A_*$ , приводят к коллапсу  $\psi$ -функции зеркала, т.е. стрелки прибора. При этом происходит измерение физической величины  $U$  при некотором ее значении  $u_i$ , а результат измерения может быть воспринят внешним миром и при желании "записан" в памяти по отраженному от  $A_*$  фотону. Нетрудно видеть, что при таком измерении происходят два необратимых процесса. Сначала из-за хаотизации фаз происходит расслоение единого когерентного состояния на множество волновых пакетов. При этом единая  $\psi$ -функция оказывается разбитой на куски с небольшим искажением фаз, но частица (фотон) может находиться только в одной из областей когерентности. Волновая функция как бы распадается в набор вероятностей, и только внутри одного из пакетов остается чистое состояние с частицей. Можно сказать, что волновая функция представляет собой нечто более "нежное", чем распределение вероятностей или информации: у разных частей волновой функции чистого состояния имеется еще некоторое "сродство через фазы".

Теперь нетрудно понять, что представляет собой классический мир. А именно, у макроскопических тел большого размера с большой массой даже редкие "измерения" достаточны для того, чтобы локализация их волновых пакетов была ничтожно мала по сравнению с

размерами тела. Такие тела "навечно" приобретают характеристики классических объектов с точно заданными координатами. Классический мир — это мир крупных размеров и больших масс. Соответственно, любые измерения, которые затем воспринимаются классическими объектами, сопровождаются коллапсом волновых функций в соответствии с рецептами квантовой механики. Для редукции волновых пакетов классических тел нашего окружения вполне достаточны те объективно происходящие "измерения", которые осуществляются неравновесным излучением Солнца.

Промежуточный между классическим и квантовым мирами мезомир оказывается гораздо сложнее и гораздо богаче с точки зрения протекающих в нем физических явлений. Тела промежуточного мира обнаруживают как классические, так и квантовые свойства. Мезомир — это мир множества чередующихся коллапсов волновых функций и вероятностей, это мир рождающихся и умирающих когерентностей.

Универсального рецепта для описания мезомира, по-видимому, не существует: слишком уж велико разнообразие конкретных физических условий, в которых возможно сочетание классических и квантовых процессов. Один из возможных подходов мы описали в предыдущем разделе, но их может быть гораздо больше.

В настоящее время кажется более ясным, какие процессы не могут существовать. Так, например, суперпозиции типа шрёдингеровского кота должны быть заведомо запрещены. В самом деле, уже сама регистрация радиоактивного распада исключает возможность его суперпозиции с нераспавшимся ядром. Тем более не может существовать суперпозиция живого и мертвого кота, поскольку живое существо представляет собой макротело, тесно связанное с внешним миром и тем самым подверженное постоянным "измерениям". Как мы видим, логика мезомира исключает очень многие мыслимые, но физически невозможные состояния макромира, когда макротелам могут приписываться широкие когерентные волновые функции, несовместимые с реальными условиями. А в самом мезомире не исключены смешанные, т.е. классически-квантовые состояния и процессы, когда когерентность пакетов может уничтожаться и возрождаться вновь. Именно поэтому мезомир — это очень подвижный и живой мир сложно организованных коллективных явлений.

Вернемся теперь к рис. 11 и рассмотрим более подробно, как "измерения" во внешнем мире могут приводить к локализации волновой функции массивной частицы. Рассмотрим квантовую систему, состоящую из двух частиц — очень массивной частицы с массой  $M$  и легкой с массой  $m \ll M$  (рис. 12). Попытаемся выяснить, как измерения, проводимые над легкой частицей, приводят к косвен-

ному "измерению", т.е. к сжатию волновой функции тяжелой частицы. Пусть волновая функция рассматриваемой системы выглядит как  $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор легкой частицы, а  $\mathbf{R}$  — вектор положения тяжелой частицы. Мы предположим, что "метка"  $A_*$  на рис. 12 соответствует некоторому локальному потенциалу взаимодействия  $U(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|)$  рассматриваемых нами частиц. Допустим, что этот потенциал не только сильно локализован, но и не очень глубок, так что для описания взаимодействия, т.е. рассеяния легкой частицы на тяжелой, можно воспользоваться борновским приближением. Более конкретно, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть на тело  $M$  падает плоская волна

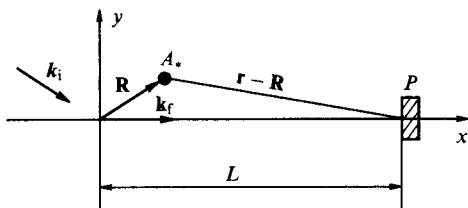


Рис. 12. Плоская волна легкой частицы падает на центр рассеяния  $A_*$ , представляющий собой "метку" тяжелой частицы. Рассеянная волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_f$  падает на прибор  $P$  и там измеряется.

легкой частицы с зависимостью от координат вида  $\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$ . Здесь  $\mathbf{k}_i$  — волновое число падающей волны (см. рис. 12). Мы будем считать, что метка  $A_*$  находится вблизи начала координат, так что  $R \ll r$ .

Пусть, например,  $R = 0$ . Тогда падающая волна выглядит, как  $\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$ , а рассеянная, — как  $r^{-1} \exp(i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r})$  (мы не учитываем здесь общей временной зависимости типа  $\exp(-i\omega t)$ ). Если мы теперь сместим центр рассеяния  $A_*$  в точку  $\mathbf{R}$ , то падающая волна в точке рассеяния приобретет множитель  $\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R})$ , так что после рассеяния из этой точки в точку  $\mathbf{r}$  прибежит волна  $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^{-1} \exp[i\mathbf{k}_f \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}) + i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R}]$ . Если прибор  $P$  находится очень далеко, то величину  $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$  в предэкспоненте можно считать равной просто  $L = \text{const}$ . Эта величина для нас несущественна, а вот фазовый множитель мы рассмотрим более подробно. Будем считать, что массивная частица покоится и что рассеяние легкой частицы является упругим, так что  $|\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i| = k$ . Кроме того, чтобы не усложнять выкладок, допустим, что падающая волна распространяется точно вдоль оси  $x$ , т.е. имеет вид  $\exp(ikx)$ , и что прибор также расположен на этой же оси. Кроме того, допустим, что  $\mathbf{R}$  имеет только две координаты, которые мы обозначим заглавными буквами  $X, Y$ . Считая  $y, Y \ll L$ , получаем выражение для фазового множителя рассеянной волны с точностью до  $Y^2$

$$\exp \left[ ikx + \frac{ik}{2} \frac{(y - Y)^2}{L} \right].$$



Допустим теперь, что эта волна измеряется прибором  $P$ , т.е. из нее выделяется локализованный по  $y$  пакет вида  $\psi_P = \exp[ikx - (y^2/2b^2)]$ , где  $b$  — ширина локализации пакета. Чтобы "спроектировать" волновую функцию на это состояние, достаточно умножить ее на  $\psi_P^*$  и проинтегрировать результат по  $x, y$ . В результате получаем выражение, пропорциональное экспоненте

$$\Phi = \exp \left[ -\frac{k^2 b^2 Y^2}{2(L^2 + k^2 b^4)} \left( 1 - \frac{iL}{kb^2} \right) \right]. \quad (149)$$

Эта экспонента должна умножаться на волновую функцию массивной частицы  $\Psi(Y)$ . Как мы видим, измерение легкой частицы автоматически приводит к локализации тяжелой частицы с формфактором  $\Phi$ . Если не учитывать мнимую часть под знаком экспоненты  $\Phi$  и сохранить только реальную часть формфактора  $\Phi_R$ , то его можно представить в виде

$$\Phi_R = \exp \left( -\frac{Y^2}{2a^2} \right), \quad (150)$$

где

$$a^2 = \frac{L^2 + k^2 b^4}{k^2 b^2}.$$

В приведенных выражениях легко усматриваются два предельных случая:  $L^2 \ll x^2 b^4$  и  $L^2 \gg k^2 b^4$ . В первом случае (близко расположенного прибора) имеем  $a^2 = b^2$ , т.е. локализация тяжелой частицы в точности совпадает с локализацией легкой частицы. В другом предельном случае,  $L^2 \gg k^2 b^4$ , величина  $a = 1/\theta k$ , где  $\theta = b/L$  — угол раствора конуса, который "глядит" на прибор со стороны частицы. Так как  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны, то даже при малых значениях  $\theta \sim 1/10$  размер локализации частицы оказывается масштаба длины волны.

Заметим, что полное выражение (149) для  $\Phi$  содержит еще экспоненту с мнимой фазой, которая при небольших нарушениях когерентности может приводить к дополнительной локализации при  $L^2 \gg k^2 b^4$ , но мы пока не будем заниматься столь детальным рассмотрением.

В приведенных рассуждениях мы прибегали к понятию прибора. Но на самом деле он нам совсем не нужен: если локализация легкой частицы происходит где-то во внешнем мире, т.е. при взаимодействии с неизвестным нам "прибором", то этот процесс все равно приведет к локализации волновой функции тяжелой частицы. Если при этом

$L^2 \gg k^2 b^4$  и угол  $\theta$  мал (но не исчезающе мал), то локализация тяжелой частицы будет масштаба длины волны волновой функции легкой частицы.

С помощью рис. 12 мы рассмотрели локализацию по  $y$ , но тот же самый прибор, имеющий конечный размер по  $z$ , осуществляет аналогичную локализацию волновой функции по направлению оси  $z$ . А если повернуть прибор вместе с падающей волной на  $90^\circ$ , то можно осуществить локализацию по оси  $x$ . Естественно, что при спонтанно происходящих "измерениях" на многих падающих частицах будет достигаться полная локализация по всем направлениям.

Допустим, что такие "измерения" с разными падающими частицами повторяются одно за другим с некоторой средней частотой  $\dot{N} = 1/\tau$ , так что за большой промежуток времени  $t$  происходит большое число  $N = \dot{N}t = t/\tau$  "измерений". Каждое измерение даст новый множитель в виде формфактора (150), так что после  $N$  измерений мы получим множитель  $\Phi^N$ . Соответственно локализация станет равной  $a/N^{1/2} = a(\tau/t)^{1/2}$ . При очень большой массе  $M$  эта локализация будет продолжаться вплоть до перехода к классическому объекту с вполне определенной классической координатой  $Y$  (и, соответственно,  $X$  и  $Z$ ). А если масса не очень велика, то процесс локализации будет скомпенсирован обратным расширением волнового пакета между последовательными "измерениями". Поскольку это уширение осуществляется членом с кинетической энергией в уравнении Шрёдингера, то мы можем оценить минимальную локализацию частицы с массой  $M$  как

$$a_{\min} \approx \left( a^2 \frac{\hbar \tau}{M} \right)^{1/4} = \left( a^2 \frac{\hbar}{M \dot{N}} \right)^{1/4}.$$

Это выражение и определяет нам условную границу между макро- и мезомирами: если величину  $a_{\min}$  с практической точки зрения можно считать равной нулю, то мы имеем дело с макротелом с классическими координатами. В противном случае наряду со свойствами классического объекта тело может проявлять и волновые свойства, т.е. мы имеем дело с объектом мезомира.

Итак, с точки зрения волновых функций, макромир — это мир "окаменелостей": все прошлые "измерения", проведенные над макротелами в предыдущие эпохи, привели к тому, что эти макротела "потеряли" свои былые волновые свойства и стали классическими объектами с четко определенными координатами. При "соприкосновении" с микро- и мезомирами они могут лишь "вспоминать" свою волновую сущность в виде совместного "коллапса" волновой функции

микромира и случайного выбора координаты классического объекта, например в виде показания "стрелки" измерительного устройства. Этот последний процесс также можно описать в рамках модели рассеяния легкой частицы на "метке"  $A_*$ , схема которой изображена на рис. 12. Для этого требуется лишь, чтобы прибор  $P$  смог различить различные положения метки  $A_*$  в одном когерентном состоянии. Проще всего это можно сделать, дополняя прибор  $P$  набором коллиматоров с детекторами, чтобы каждая из этих пар была направлена в свою точку с координатой  $Y_i$ . Эти дискретные координаты  $Y_i$  должны быть подобраны таким образом, чтобы формфакторы для различных положений метки  $A_*$  не перекрывались между собой по координате  $Y$ . Тогда первое же срабатывание одного из детекторов измеряет одну из координат  $Y_i$  (с учетом направления на нее соответствующего коллиматора).

Если вместо прибора  $P$  опять выступает внешний мир, то рассеяние одной лишь легкой частицы сразу же приводит к коллапсу волновой функции макрообъекта по координате  $Y$ . Если микрочастицу "выпускать" во внешний мир через систему коллиматоров, так что каждый из них направлен только на одно из дискретных положений  $Y_i$ , то каждый коллапс микрочастицы сопровождается коллапсом  $Y \rightarrow Y_i$ . Повторяя "измерения" многократно, можно установить статистическое распределение координаты  $Y_i$ . Тем самым можно найти матрицу плотности смешанного состояния макрообъекта после "измерения", т.е. разрушения когерентности из-за рассеяния и последующего "выхода" во внешний мир рассеянной микрочастицы.

## 32. Коллапсы волновых функций

При объяснении принципов квантовой теории и ее статистического характера (см., например, [51]) нередко используется следующий простой пример. Пусть имеется посеребренная стеклянная пластинка, которая при падении на нее светового пучка пропускает и отражает ровно половину исходной интенсивности. Допустим теперь, что на такую пластинку падает один единственный фотон. Его волновая функция естественно расщепляется на отраженную и проходящую волны. Но если на пути этих волн установить два фотодетектора, то сработает только один из них: фотон окажется либо справа, либо слева от пластинки, т.е. он либо отразится, либо пройдет сквозь пластинку. Регистрация фотона представляет собой случайный процесс с вероятностью регистрации в каждом из детекторов, равной  $1/2$ .

Здесь мы встречаемся с типичным примером коллапса волновой функции (см. [52]). В момент регистрации фотона, точнее, в течение

очень короткого промежутка времени срабатывания фотодетектора, волновая функция фотона уничтожается во всем пространстве вне детектора, а внутри детектора фотон также исчезает, будучи поглощенным.

Легко видеть, что для коллапса волновой функции нет нужды использовать полупрозрачную пластинку. Если на фотодетектор падает монохроматический фотон с очень протяженной волновой функцией, то его поглощение может происходить на малом участке волнового пакета, а уничтожится этот пакет сразу во всем пространстве.

В точности такой же коллапс происходит при падении любой квантовой частицы на необратимую среду, например, на фотопластину, камеру Вильсона или просто газ при комнатной температуре. Частица при этом "регистрируется" внутри среды, а всюду вне области регистрации волновая функция уничтожается. Мы опять встречаемся с типичным примером коллапса волновой функции. Этот процесс называют иногда "стягиванием волновой функции", но такой термин неудачен, так как он может породить представление о каком-то физическом процессе типа "стока" волновой функции к области коллапсирования. Но на самом деле никакого физического стока у волновой функции нет: волновая функция просто-напросто уничтожается вне области "регистрации". Мы примем это утверждение как основной постулат, вытекающий из экспериментальных данных. Тем самым мы придаем волновой функции чисто информационный смысл: волновая функция отлична от нуля только там, где частица может находиться, и она строго равна нулю там, где частица отсутствует. Такой подход находится в полном соответствии с основными принципами атомизма, когда в качестве исходного положения принимается утверждение о сохранении неделимого атома (т.е. частицы) как некоторой сущности.

Коллапс волновой функции не может быть описан в рамках уравнения Шрёдингера, связывающего изменение плотности  $|\psi|^2$  с некоторыми потоками. При коллапсе никаких таких потоков нет, а происходит просто уничтожение волновой функции как некоторой потенциальной информации вне той области, где частица оказалась вовлеченной в необратимый процесс. Заметим, что такой процесс уничтожения волновой функции в широкой области пространства может отвечать ничтожно малым изменениям физических величин  $l_i$ , определенных соотношениями  $l_i = \langle \psi | L_i | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$ , где  $L_i$  — соответствующие локальные операторы.

Выше мы познакомились с некоторыми примерами коллапса волновых функций: при радиоактивном распаде и при косвенных

"измерениях" в результате коллапсирования волновой функции частицы, улетающей во внешний мир и теряющей там когерентность. Как правило, коллапс относится скорее к вероятностям "ожидания" со стороны внешнего мира, т.е. он фактически соответствует случайному "выпадению" определенного значения той или иной физической величины. Однако его удобнее относить к самой волновой функции. При таком подходе коллапс можно описывать "оператором измерения"  $M$  в обобщенном уравнении Шрёдингера (145). Выбранное нами название "оператор измерения" показывает, что этот оператор должен охватывать и процессы квантовых измерений. В последнем случае оператор  $M$  совпадает с проекционным оператором  $P_i$ : оператор  $P_i$  осуществляет проекцию начального состояния  $\psi$  на собственный вектор  $\psi_i$ , соответствующий собственному значению  $u_i$  измеряемой физической величины  $U$ . Поэтому при обсуждении реальных процессов измерения можно пользоваться проекционными операторами фон Неймана [2]. Однако наша более общая задача состоит не только в описании искусственно проводимых измерений, но и в описании естественно протекающих процессов коллапсирования волновых функций, составляющих вместе с обратимой динамикой согласно уравнению Шрёдингера реально развивающуюся "квантовую историю".

Действие оператора  $M$  сводится к случайным переходам волновой функции к новым более локализованным состояниям. Это своего рода последовательное применение проекционных операторов. Каждый из таких проекционных операторов в обозначениях Дирака можно записать в виде  $P = |\psi_c\rangle\langle\psi_c|$ , где  $\psi_c$  — волновая функция после коллапса. Действие оператора  $P$  выглядит как

$$P_c\psi = \psi_c \int \psi_c^* \psi \, dx = |\psi_c\rangle\langle\psi_c|\psi\rangle, \quad (151)$$

если  $\psi(x)$  зависит только от одной переменной  $x$ . В общем случае действие  $P_c$  на  $\psi$ , т.е. проекция  $\psi$  на  $\psi_c$  равна скалярному произведению волновых функций  $\psi_c$  и  $\psi$ , умноженному на волновую функцию  $\psi_c$ . Оператор  $M$  отличается от  $P$  только тем, что после проектирования волновая функция должна быть нормирована на единицу. Кроме того, оператор  $M$ , как правило, представляет собой набор многих случайных проектирований. Поскольку обе функции,  $\psi$  и  $\psi_c$ , эволюционируют с одним и тем же оператором Гамильтона  $H$ , то во многих случаях точный момент времени для применения оператора  $M$  не играет роли: в частности, его можно считать примененным из будущего, если в промежутке от данного времени  $t$  до бесконечности нет других коллапсов.

В этом разделе мы обсудим вопрос о том, какими общими свойствами должен обладать оператор измерения  $M$ . Прежде всего отметим, что в уравнении (145) оператор  $M(\psi)$  входит в виде слагаемого наряду с кинетической энергией и полной энергией  $\hbar\omega$ . Поэтому оператор  $M$  должен иметь размерность энергии, т.е. отношения  $\hbar/t_0$ , где  $t_0$  — некоторое характерное время измерения. Таким образом, вмешательство оператора  $M(\psi)$  в эволюцию квантовой частицы в общем случае должно возмущать не только волновую функцию, но и энергию этой частицы. Другими словами, измерение некоторого квантового объекта может сопровождаться обменом энергии с внешним окружением. Однако величина этой энергии может быть исчезающе мала, если либо измерение производится очень долго, либо коллапсирование происходит на столь широкие волновые пакеты, что соответствующим изменением энергии можно пренебречь. Например, при измерении физической величины  $U$ , оператор которой коммутирует с гамильтонианом частицы, возмущения энергии не происходит и соответствующее измерение может происходить без разрушения стационарного состояния.

Самый простой пример измерения физической величины — это эксперимент типа Штерна–Герлаха, когда при пропускании пучка частиц через неоднородное магнитное поле происходит расщепление этого пучка на компоненты, соответствующие разным значениям проекции спина на ось  $z$ . Пусть, например, проекция спина  $\sigma_z/2$  принимает только два значения  $\pm 1/2$ . Тогда на детекторе будет только две линии. Пусть на вход прибора влетает волновой пакет прямоугольной формы по продольной координате  $x$ . Если длина пакета равна  $L$ , то пространственная часть квадрата волновой функции равна  $|\psi|^2 = 1/L$ . Перед падением на детекторы (их в данном случае два) волновой пакет расщепляется на две компоненты с величинами  $\sigma_z = \pm 1$ . Обозначим через  $v$  скорость частицы, а через  $\tau$  — время регистрации частицы внутри детектора. Если  $\tau \ll L/v$ , то волновой пакет можно мысленно "нарезать" на слои шириной  $l = v\tau$ . Очевидно, что каждый из детекторов будет "последовательно" анализировать пакет, и с вероятностью  $l/2L$  один из детекторов зарегистрирует частицу и вместе с тем измерит величину  $\sigma_z$ . В данном примере можно считать, что на вход детектора падает вероятность распределения по  $x$ , равная  $|\psi|^2$ , так что фактически происходит коллапс вероятностей. Но нет большой ошибки сказать, что каждый из детекторов осуществляет коллапс волновой функции в слой шириной  $l$  в одном из детекторов, уничтожая всю оставшуюся часть волновой функции. Результат не изменится, если считать, что еще до падения на детектор происходит коллапс волновой функции в

одну из компонент с  $\sigma_z = +1$  или  $\sigma_z = -1$ , а затем уже эта компонента коллапсирует в слой шириной  $l$  на одном из детекторов. Введение соответствующего оператора  $M(\psi)$  в обобщенное уравнение Шрёдингера, позволяет описать коллапс волновой функции как следствие коллапса вероятностей (бросания костей) при информационной связи квантовой частицы с внешним миром.

Рассмотрим теперь, как действует оператор  $M(\psi)$  в случае радиоактивного распада. И в этом случае удобнее рассуждать с вероятностями, а не с волновыми функциями. Более того, удобно вместо  $|\psi|^2$  ввести в рассмотрение очень много одинаковых радиоактивных ядер и рассуждать с числом ядер. Пусть зависимость  $N = N_0 \exp(-t/\tau)$  показывает, как убывает со временем число радиоактивных ядер. Здесь  $N_0$  — число ядер в начальный момент, а  $1/\tau$  — константа темпа распада. Выберем некоторый интервал времени  $\Delta t \ll \tau$  и рассмотрим, что происходит с волновыми функциями  $\alpha$ -частиц, вылетающих из ядер. Выберем некоторое значение  $R = R_0$  для расстояния от радиоактивного источника и будем считать, что  $\alpha$ -частицы "измеряются" за пределами этого радиуса, т.е. попадают в окружение атомов и молекул, в которых они производят неравновесные треки. Пусть  $v$  — скорость  $\alpha$ -частиц. Тогда за время  $\Delta t$  они пройдут расстояние  $\Delta R = v \Delta t$ . Так как мощность источника равна  $N/\tau$ , то в слое объема  $4\pi R^2 v \Delta t$  окажется  $\Delta N = N \Delta t / \tau$  частиц.

Пусть интервал  $\Delta R$  выбран таким образом, что он соответствует ширине локализации волнового пакета после "измерения". Если и в поперечном направлении ширина локализации имеет порядок  $\Delta R$ , то в рассматриваемом слое объема  $4\pi R_0^2 \Delta R$  будет  $N_S = 4\pi (R_0/\Delta R)^2$  ячеек, в одну из которых может попадать каждая из коллапсирующих частиц. В расчете на одну частицу вероятность попадания в ячейку равна

$$\Delta p = \frac{\Delta N}{N} \frac{1}{N_S} = \frac{1}{\tau} \frac{(\Delta R)^3}{4\pi v R_0^2}.$$

Нетрудно видеть, что в расчете на одну частицу величина  $1/\tau$  равна потоку через поверхность радиуса  $R_0$ :  $1/\tau = |\psi(R)|^2 \cdot 4\pi R^2 v_0$ . Поэтому вероятность  $\Delta p$  равна просто  $\Delta p = |\psi(R)|^2 (\Delta R)^3$ . Соответственно, оператор  $M(\psi)$  можно считать равным формфактору, который коллапсирует частицу в одну из ячеек объема  $(\Delta R)^3$ , уничтожая  $\psi$ -функцию во всех остальных ячейках. Этот процесс можно считать повторяющимся по закону случая вблизи сферы радиуса  $R_0$  со средней частотой повторения  $1/\Delta t = v/R_0$ . Если процесс распада является медленным, то сумма вероятностей попада-

ния во все ячейки объема  $4\pi R_0^2 \Delta R$ , т.е.  $|\psi|^2 \cdot 4\pi R_0^2 \Delta R$ , может оказаться значительно меньше единицы. Это означает, что процесс коллапсирования вблизи сферы радиуса  $R_0$  должен повторяться много раз, прежде чем частица попадет хотя бы в одну из ячеек. Но если она туда попадает, то  $|\psi|^2$  в ячейке должна быть увеличена до  $(\Delta R)^{-3}$ , а во всем остальном объеме волновая функция уничтожается.

Пакет, сколлапсированный в объем  $(\Delta R)^3$ , при дальнейшем удалении от источника будет расплываться, так что при больших временах его поперечная локализация согласно формуле (61) будет изменяться как  $\Delta x \sim \hbar t / m \Delta R$ . Что касается радиальной координаты пакета, то она тоже возрастает со временем как  $vt$ , так что при больших  $t$  пакет будет оставаться в пределах конуса размером

$$\frac{\Delta x}{vt} = \frac{\hbar}{mv \Delta R}.$$

Отсюда видно, что выбор  $R_0$  довольно произволен: если только  $R_0 \gg \Delta R$ , то дальнейшее распространение волновых пакетов мало зависит от величины  $R_0$ . Более того, картину пакетизации можно представить себе в развитии, обратном по времени, вплоть до масштабов  $R_0 \geq \Delta R$ . Таким образом, оператор измерения  $M$  можно представить себе как случайный выбор волнового пакета с помощью некоторого формфактора, локализованного как вдоль радиуса, так и по углу. При этом не так существенно, в какой именно момент осуществляется сам коллапс: он может лишь быть "намечен" как "тренд" вблизи определенной точки с радиусом  $R = vt$ , а волновой пакет может формироваться со сдвигом во времени, т.е. значительно позднее. Сам "тренд" соответствует одному биту информации о последующем формировании волнового пакета вблизи заданной точки с определенными угловыми координатами и радиальной координатой  $R = vt$ . Соответственно, и оператор "измерения"  $M$  допускает свободу в изменении ширины локализации волнового пакета вокруг случайно выбираемых координат его центра.

Реальное "измерение"  $\alpha$ -частицы может происходить на довольно большом расстоянии от ядра. Но получаемый при этом волновой пакет можно как бы "спроектировать" на прошлое. Соответственно, коллапс волновой функции можно считать феноменом спонтанного (самопроизвольного) стягивания волновой функции в волновой пакет в "предчувствии" измерения в будущем.

Коллапс — это необратимый процесс, но его развитие во времени не похоже на обычную причинную эволюцию из прошлого в будущее с последовательным прохождением через все промежуточные фазы: для столь подробного описания волновой функции потребовались бы



промежуточные измерения, а они сами уничтожили бы когерентность состояния. Таким образом, оператор  $M(\psi)$  в обобщенном уравнении Шрёдингера выглядит значительно сложнее, чем операторы физических величин.

С учетом коллапсов связь между прошлым и будущим может быть сложнее, чем это представляется с точки зрения обычного классического детерминизма. Для ее анализа оказываются удобными упрощенные схемы измерений.

Рассмотрим, например, ЭПР-пару в варианте Боба, когда две частицы со спином  $1/2$  приготавливаются в начальный момент  $t = 0$  в синглетном состоянии, а затем они разлетаются в разные стороны на большое расстояние друг от друга. Допустим теперь, что в момент  $t_1$  у первой частицы измеряется  $x$ -компонента спина  $\sigma_{x1}$ , и это измерение дает значение  $\sigma_{x1} = +1$ . Это означает, что в силу корреляции у второй частицы происходит коллапс в состояние с  $\sigma_{x2} = -1$ . Поскольку у наблюдателя нет возможности управлять выбором величины  $\sigma_{x1}$  и значения  $\sigma_{x1} = \pm 1$  выпадают совершенно случайно, то коллапс второго спина  $\sigma_{x2} \rightarrow -1$  нельзя использовать для мгновенной передачи информации от первого наблюдателя ко второму. Пусть теперь второй наблюдатель измеряет компоненту  $\sigma_{y2}$  и с вероятностью  $1/2$  получает значение  $\sigma_{y2} = +1$ . Соответственно, в коррелированной ЭПР-паре это измерение привело бы к редукции состояния первой частицы  $\sigma_{y1} \rightarrow -1$ . Если оба наблюдателя находятся недалеко друг от друга, то коллапс волновых функций будет создаваться первым по времени измерением. Однако при большом удалении частиц друг от друга понятие одновременности теряет абсолютный смысл: в лоренц-инвариантной теории порядок событий на пространственноподобной плоскости зависит от скорости системы координат.

Возникает вопрос, как процессы редукции волновых функций могут быть совместимы с лоренц-инвариантностью. Рассмотрим его несколько более подробно. Начнем с измерения  $\sigma_{x1} = 1$  у первой частицы в момент времени  $t$ . Это измерение автоматически приводит к  $\sigma_{x2} = -1$  у второй частицы. Поскольку над второй частицей никаких действий не совершалось, то представляется естественным, что значение  $\sigma_{x2} = -1$  у спина второй частицы является вполне определенным не только при временах, больших  $t_1$ , но и при  $t < t_1$ . Другими словами, измерение  $\sigma_{x1} = 1$  не только позволяет предсказать величину  $\sigma_{x2} = -1$  у будущего измерения  $\sigma_{x2}$ , но и удостоверяет величину  $\sigma_{x2} = -1$  в прошлом. Но аналогичное рассуждение можно распространить и на измерение спина второй частицы. А именно, измеренное значение  $\sigma_{y2} = +1$  означает в силу корреляции, что  $\sigma_{y1}$  принимает

достоверное значение  $\sigma_{y1} = -1$  как после измерения  $\sigma_{y2} = 1$ , так и до проведения этого измерения. Теперь мы, казалось бы, приходим к некоторому парадоксу. А именно, если  $\sigma_{x1} = 1$  измерено первым, то спин второй частицы принимает значение  $\sigma_{x2} = -1$ , а последующее измерение  $\sigma_{y2} = 1$  разрушает когерентность и корреляцию ЭПР-пары. А если первым по времени измерено  $\sigma_{y2} = 1$ , то у первой частицы автоматически устанавливается значение  $\sigma_{y1} = -1$ , и последующее измерение  $\sigma_{x1} = 1$  разрушает корреляцию ЭПР-пары. Что же касается последовательности измерений, то она может быть разной в разных лоренц-инвариантных системах координат. Поэтому не ясно, какой сценарий является истинным.

Но на самом деле здесь большого противоречия нет. Дело в том, что промежуточные коррелированные состояния типа  $\sigma_{x1} = 1$ ,  $\sigma_{x2} = -1$  и  $\sigma_{y2} = 1$ ,  $\sigma_{y1} = -1$  являются только возможными, но не реально измеренными состояниями. Реально же измеренное состояние с  $\sigma_{x1} = 1$ ,  $\sigma_{y2} = 1$  не сохраняет корреляции ЭПР-пары, хотя на первый взгляд операторы  $\sigma_{x1}$  и  $\sigma_{y2}$  кажутся коммутирующими, т.е. одновременно измеримыми. На самом деле, измерение одного оператора вносит возмущение в измерение второго именно из-за наличия корреляции (см. по этому поводу статью [36]). Поэтому измерения  $\sigma_{x1}$  и  $\sigma_{y2}$  будут давать некоррелированные пары  $\sigma_{x1} = \pm 1$ ,  $\sigma_{y2} = \pm 1$  без всякой причинной связи между измерениями.

Вернемся теперь к коррелированным измерениям типа  $\sigma_{x1} = 1$ ,  $\sigma_{x2} = -1$ . Здесь мы имеем жесткую корреляцию. Поэтому совершенно безразлично, какое из измерений проводится первым: второе оказывается определенным как вперед, так и назад по времени. Второе измерение раскрывает лишь результат заранее предопределенный либо прошлым, либо будущим измерением над первой частицей. Разумеется, здесь совершенно условно можно говорить о первой и второй частицах — обе они эквивалентны. Поэтому в случае измерения  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{x2}$  более логично считать, что выбор  $\sigma_{x1} = 1$ ,  $\sigma_{x2} = -1$  является совершенно спонтанным, т.е. произошедшим еще до реального проведенного измерения. Но еще более логично следует считать, что мы имеем пока только хинт-символ измерения, который еще не превратился в реальный результат измерения. Только сам акт измерения осуществляет выбор значений  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{x2}$ . Ситуация здесь сходна с радиоактивным распадом: ЭПР-пара как бы самопроизвольно выбирает поляризацию, согласованную с приборами. Эта поляризация и фиксируется затем приборами.

Следует подчеркнуть, что во всех трех рассмотренных случаях, — измерении  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{x2}$  в ЭПР-паре, радиоактивном распаде и коллапсе волновой функции тяжелой частицы при косвенном "измерении" из-за

улетающей в бесконечность коррелированной легкой частицы, — никакого энергетического возмущения извне не вносится. Достаточно считать, что где-то во внешнем мире появляется один бит информации, что вполне совместимо с неравновесностью внешнего мира. Если же ограничиться чисто локальным рассмотрением, то соответствующий коллапс можно считать спонтанным. Его можно описывать оператором "измерения"  $M$  в обобщенном уравнении Шрёдингера. Этот оператор можно считать случайным с не очень точным указанием момента времени, когда он осуществляет коллапс.

Рассмотрим теперь несколько более сложный пример системы многих частиц, а именно, разреженный газ "классических" частиц. Допустим, что газ из атомов (или молекул) с плотностью  $n$  находится при температуре  $T$ . Пусть  $\sigma$  — поперечное сечение столкновений между частицами, так что величина  $r_0 = \sigma^{1/2}$  характеризует средний размер атома, а величина  $\lambda = 1/n\sigma$  представляет собой среднюю длину свободного пробега. У разреженного газа параметр плотности  $\varepsilon = nr_0^3$  представляет собой очень малую величину:  $\varepsilon \ll 1$ . Допустим, что в начальный момент газ является классическим, т.е. средний размер локализации волновых функций, который мы обозначим через  $b$ , заметно меньше среднего расстояния между атомами  $n^{-1/3}$ . Тогда газ можно считать состоящим из множества отдельных волновых пакетов. Попробуем понять, что будет происходить с этими волновыми пакетами, и может ли начальная картина отдельных волновых пакетов сохраниться в последующем.

Пусть  $v_T = (T/m)^{1/2}$  представляет собой среднюю тепловую скорость. Величина

$$\tau = \frac{\lambda}{v_T} = \frac{1}{n\sigma v_T}$$

равна среднему времени между парными столкновениями атомов между собой. Выберем произвольный волновой пакет и рассмотрим, что с ним будет происходить. Если в начальный момент величина " $b$ " была меньше  $r_0$  и это неравенство сохраняется в течение времени  $\tau$ , то волновой пакет будет эволюционировать как классическая частица, сталкиваясь и рассеиваясь на других атомах с частотой  $\nu = 1/\tau$ . Таким образом, через время  $\tau$  начальный волновой пакет исчезает, превращаясь в рассеянную волну. А если  $b > r_0$ , то начальный пакет также исчезнет за время  $\tau$ , но превратится не в одну, а в  $(b/r_0)^2$  рассеянных волн, поскольку на длине  $\lambda$  исходный пакет встретит  $(b/r_0)^2$  различных атомов. Во втором случае,  $(b/r_0)^2 > 1$ , отдельные рассеянные волны потеряют взаимную когерентность, и исходный атом с вероятностью  $(r_0/b)^2$  попадет в одну из рассеянных волн. А в первом

случае,  $b < r_0$ , при первом рассеянии пакет может еще сохранить свою индивидуальность, но уже при небольшом числе последующих столкновений рассеянная волна станет настолько сложной формы, что когерентность между ее отдельными участками будет полностью потеряна. Частица при этом опять сможет попасть только в один из рассеянных пакетов.

Итак, мы можем сделать вывод о том, что в последующей эволюции газа должна сохраниться его "пакетная структура". Нетрудно также оценить размеры установившихся (в среднем) волновых пакетов. Для этого можно воспользоваться соотношением неопределенностей. Пусть  $b$  — пространственная локализация пакета. Тогда неопределенность скоростей  $\Delta v$  составляет величину  $\Delta v \sim \hbar/mb$ . Средний размер пакета не сильно изменится за время между столкновениями  $\tau$ , если  $\Delta v\tau \sim b$ . Отсюда находим

$$b = \left( \frac{\hbar}{mv_T \sigma n} \right)^{1/2} = (b_0 \lambda)^{1/2}, \quad (152)$$

где мы обозначили величину  $b_0 = \hbar/mv_T$  порядка де-бройлевской длины волны атома, движущегося с тепловой скоростью.

Давайте оценим величину (152) для воздуха при атмосферном давлении. Подставляя (в системе СГС)  $\hbar = 10^{-27}$ ,  $m = 3 \times 10^{-23}$ ,  $v_T = 3 \times 10^4$ ,  $\sigma = 10^{-15}$ ,  $n = 3 \times 10^{19}$ , получаем приблизительно  $b \approx 2 \times 10^{-7}$ . Эта величина несколько меньше среднего расстояния между атомами  $n^{-1/3} \approx 3 \times 10^{-7}$ . Как мы видим, воздух можно условно считать газом классических частиц, в том смысле, что эффективные размеры волновых пакетов молекул азота и кислорода не превышают среднего расстояния между молекулами.

В наших рассуждениях мы не учитывали, что для тождественных бозе-частиц волновая функция должна быть симметризована по всем молекулам. Но это обстоятельство не очень сильно влияет на наши выводы, если действительно  $b < r_0$ . Благодаря тождественности частиц волновой пакет одной частицы не отличим от волнового пакета второй сталкивающейся частицы, но пакетизированная структура газа при этом все равно сохраняется.

В наших рассуждениях ключевым моментом является исходное положение, что частица может попадать только в одну из составных взаимно некоррелированных частей сложного волнового пакета. Именно это положение и лежит в основе статистической интерпретации квадрата волновой функции  $|\psi|^2$ . Превращение одного пакета в набор некоррелированных пакетов равносильно превращению чистого состояния в смешанное, т.е. как бы превращению волновой

функции в вероятности. Для внешнего мира обсуждаемый нами переход частицы в одну из составных частей пакета не является наблюдаемым. Следовательно, хотя внутри газа и происходит эволюция волновых пакетов с соответствующими коллапсами, во внешнем мире они могут проявляться только в виде вероятностей, которые должны описываться статистически с помощью матрицы плотности.

### 33. Классический молекулярный хаос

Главная наша задача заключается в описании неравновесных процессов, будь то квантовых или классических. В этих процессах мы будем различать две линии поведения: приближение к равновесию за счет диссипации с возрастанием соответствующей энтропии, и обратный процесс развития, или самоорганизации, с уменьшением энтропии за счет роста энтропии окружения. Естественно сначала рассмотреть первый из этих необратимых процессов, т.е. приближение к равновесию. Оказывается, что приближение к равновесию имеет характер монотонного разрушения порядка или неуклонного рассасывания начальных флуктуаций только при малом отклонении от равновесия. В сильно неравновесных системах, как правило, развиваются более сложные нелинейные процессы, в которых по ряду степеней свободы происходит не разрушение, а усложнение структур. Естественно, что начать нужно с самого простого случая малого отклонения от равновесия. Кроме того, естественно стартовать, отправляясь от самой простой физической системы.

В качестве таковой мы выберем разреженный газ классических частиц. Пусть параметр плотности  $\varepsilon = na^3$  газа (где  $n$  — плотность,  $a$  — средний размер молекулы) составляет величину, значительно меньшую единицы. Это означает, что среднее расстояние  $l = n^{-1/3}$  между молекулами значительно больше размера молекул. Поэтому молекулы газа свободно пробегают расстояние  $\lambda = l/n^2 \gg a$ , сравнительно редко сталкиваясь между собой.

В этих условиях поведение газа описывается уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f = \text{St}(f). \quad (153)$$

Здесь  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — функция распределения частиц по скоростям в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ . Квадратичный по  $f$  член столкновений  $\text{St}(f)$  описывает эволюцию функции распределения при учете парных столкновений молекул между собой. Член столкновений выводится в предположении, что обе налетающие друг на друга частицы имеют

одну и ту же функцию распределения  $f$ , а столкновения являются случайными. Такое приближение предполагает, что в газе имеет место "молекулярный хаос", т.е. молекулы перед столкновениями никак не коррелированы между собой. Это предположение кажется совершенно естественным с физической точки зрения, однако оно требует определенного обоснования, которое мы и обсудим ниже.

Член столкновений в уравнении (153) явным образом вносит необратимость, что было показано в знаменитой H-теореме Больцмана. Нередко возникает вопрос, каким образом возникает необратимость: ведь при нахождении изменения функции распределения за счет парных столкновений никаких явных допущений о необратимости, казалось бы, не делалось. Более того, сам член столкновений выводится в предположении обратимой динамики сталкивающихся частиц. Стало быть, именно допущение "молекулярного хаоса" ведет к необратимости. Нужно понять, откуда берется "молекулярный хаос" и как он затем воплощается в необратимую эволюцию функции распределения.

Рассмотрим сначала, как происходит процесс приближения к термодинамическому равновесию. Кинетическое уравнение (153) очень грубо можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f = -\nu(f - f_0), \quad (154)$$

где  $f_0$  — максвелловское распределение, имеющее плотность  $n$ , среднюю скорость  $\mathbf{u}$  и среднюю энергию  $\langle mv^2/2 \rangle$ , в точности равные аналогичным величинам для функции  $f$ . В правой части уравнения (154) коэффициент  $\nu$  представляет собой среднюю частоту парных столкновений:  $\nu = \nu_T/\lambda$ ,  $\nu_T = (T/m)^{1/2}$ . Если функция распределения  $f$  однородна по  $\mathbf{r}$ , то, как видно из (154), ее любое отклонение от  $f_0$  убывает со временем как  $\exp(-\nu t)$ . Однако если начальная функция распределения зависит как от  $\mathbf{v}$ , так и от  $\mathbf{r}$ , то ее эволюция происходит гораздо сложнее. В частности, для пространственных масштабов, значительно больших длины свободного пробега  $\lambda$ , столкновения достаточно быстро, за время  $\tau = 1/\nu$ , устанавливают локально равновесную функцию распределения с плотностью  $n$ , температурой  $T$  и скоростью  $\mathbf{u}$ , зависящими от пространственных координат.

В последующие моменты времени эволюция величин  $n$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$  описывается уравнениями газодинамики. Эти уравнения при учете малых слагаемых  $\sim 1/\nu$  содержат диссипативные члены с вязкостью и теплопроводностью. Но они приводят к гораздо более медленному убыванию флуктуаций со временем. Поскольку коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности имеют порядок

величины  $\chi \approx v_T^2/\nu$ , то возмущения масштаба  $\Lambda$  убывают всего лишь как  $\exp(-\chi t/\Lambda^2) = \exp(-v_T^2 t/\nu \Lambda^2)$ . Как мы видим, чем больше частота столкновений  $\nu$ , тем медленнее убывают со временем соответствующие возмущения. Наиболее медленно убывают возмущения максимального масштаба  $\Lambda = L$ , где  $L$  — размер сосуда. Но в конечном счете согласно кинетическому уравнению (153) должны исчезнуть все флуктуации, и функция  $f$  должна, в конце концов, достигнуть равновесного максвелловского распределения, не зависящего от пространственных координат.

Однако при выводе уравнения Больцмана (153) допущена одна неточность. Хотя член столкновений по самому своему смыслу описывает случайные соударения молекул, от этого члена сохранена только средняя по времени часть. Более правильно считать член столкновений случайной величиной, так что в уравнение (153) следует добавить флуктуационный член, равный разности между истинным случайным членом столкновений и его усредненной частью  $\text{St}(f)$ . Оказывается, что эта добавка, играющая роль сторонней случайной силы, не дает возможности для полной релаксации  $f$ , а непрерывно возобновляет тепловые флуктуации. Эти флуктуации удобно разбить на два класса: индивидуальные и коллективные. Индивидуальные флуктуации относятся к масштабам, меньшим длины пробега, когда движение частиц можно считать свободным. А для масштабов, больших  $\lambda$ , следует говорить о коллективных флуктуациях.

Коллективные флуктуации можно описывать уравнениями газодинамики. Соответствующие движения газа распадаются на два класса: звуковые колебания и несжимаемые движения типа малых вихрей. На каждую тепловую моду звуковых колебаний приходится энергия  $T$ , равная сумме кинетической энергии  $T/2$  и потенциальной энергии  $T/2$ . А на каждый вихрь приходится энергия  $T/2$ . Число таких мод составляет величину порядка  $(L/\lambda)^3$ . Отсюда видно, что энергия теплового движения коллективных мод  $\sim (3T/2)L^3/\lambda^3$  оказывается существенно меньшей полной тепловой энергии  $(3T/2)L^3n$ . Их отношение равно  $1/\lambda^3 n = a^6 n^2 = \varepsilon^2 \ll 1$ .

Итак, если в уравнении (153) вместо усредненного члена столкновений подставить его истинное случайное значение, то функция распределения эволюционирует не до максвелловского распределения  $f_0$ , а до величины  $f_0 + \tilde{f}$ , где  $\tilde{f}$  соответствует тепловым флуктуациям. У этих тепловых флуктуаций малая доля  $\varepsilon^2 \ll 1$  энергии находится в коллективных степенях движения, а остальная  $(3nT/2)(1 - \varepsilon^2)$  часть тепловой энергии находится в индивидуальных степенях движения. Полная энергия теплового движения равна  $3nT/2$ , как и полагается по законам термодинамики.

Теперь у нас остаются еще два вопроса: почему происходит релаксация надтепловых возмущений функции распределения, и можно ли считать обратимыми тепловые флуктуации? Чтобы понять, что эти вопросы действительно имеют основание, целесообразно учесть еще один возможный подход к описанию динамики газа, а именно, с помощью уравнения Лиувилля. Это уравнение описывает эволюцию функции распределения  $W(\mathbf{r}_1, v_1; \mathbf{r}_2, v_2; \dots; \mathbf{r}_N, v_N, t)$  всех  $N$  частиц газа в  $6N$ -мерном фазовом пространстве:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i^N \mathbf{v}_i \nabla_i W + \sum_i^N \mathbf{g}_i \frac{\partial W}{\partial \mathbf{v}_i} = 0. \quad (155)$$

Здесь  $\mathbf{g}_i$  — ускорение частицы номера  $i$ . В классической механике движение частиц описывается уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad m \mathbf{g}_i = \frac{d \mathbf{p}_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (156)$$

где

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{ij} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (157)$$

представляет собой гамильтониан, т.е. сумму кинетической и потенциальной энергий частиц,  $\mathbf{p}_i = m \mathbf{v}_i$  есть импульс частицы номера  $i$ ,  $\mathbf{g}_i$  — ускорение частицы номера  $i$ . В силу уравнений Гамильтона (156) вероятность  $W$  сохраняется вдоль траектории в фазовом пространстве, так что уравнение (155) можно представить в виде  $dW/dt = 0$ , где  $d/dt$  — полная производная по времени вдоль траектории. Другими словами, поток в фазовом пространстве является несжимаемым.

Уравнение Лиувилля (155) является полностью обратимым: утверждение о постоянстве  $W$  вдоль траектории справедливо как в отношении будущего, так и в отношении прошлого. Поэтому совершенно не очевидно, что статистическое описание должно приводить к необратимости — ведь в уравнении Лиувилля этого не видно. Скорее наоборот, вероятность  $W$  постоянна вдоль траектории, а для каждой из конфигураций начальных значений координат и скоростей частиц траектория определена однозначно как в будущее, так и в прошлое.

Пусть  $\mathbf{r}_i(t)$ ,  $\mathbf{v}_i(t)$  есть закон движения точки в фазовом пространстве для некоторого набора начальных значений. Легко видеть, что функция

$$W_\mu = \prod_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i(t))$$



удовлетворяет уравнению Лиувилля. В каждый момент времени эта функция соответствует одной единственной точке в фазовом пространстве. Произвольная функция  $W$  может рассматриваться как усредненное значение  $W_\mu$  по начальным данным с некоторым весом  $F_0(\mathbf{r}_{i0}, \mathbf{v}_{i0})$ . Рассмотрим теперь микроскопическую плотность в 6-мерном фазовом пространстве

$$F'_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i). \quad (158)$$

Эта функция по отношению к  $W$  играет почти такую же роль, как оператор  $N$  вторичного квантования по отношению к волновой функции  $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$ . Различие заключается лишь в добавлении переменных  $\mathbf{v}_i$  к конфигурационным переменным  $\mathbf{r}_i$ . Усредняя функцию (158) с весом  $W$ , можно найти одночастичную функцию распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . А если вместо  $W$  использовать  $W_\mu$ , то мы получим зависящую от времени микроскопическую плотность

$$F_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)). \quad (159)$$

Эту функцию можно усреднять по начальным данным, и тогда мы снова получим  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Легко видеть, что функция (159) удовлетворяет микроскопическому уравнению Климонтовича

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla F_\mu + \mathbf{g} \frac{\partial F_\mu}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (160)$$

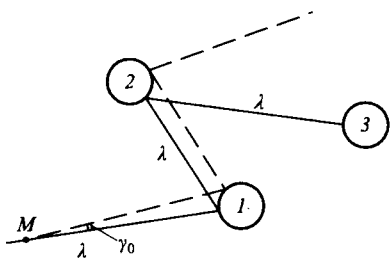
где

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{m} \nabla \int U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) F_\mu(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \quad (161)$$

Уравнение (160) также является вполне обратимым. Но если его усреднить по  $\mathbf{g}$  и по интервалу времени порядка времени столкновений, то в предположении молекулярного хаоса последнее слагаемое можно преобразовать в член столкновений. При этом ясно видно, что предположение молекулярного хаоса, т.е. отсутствия корреляции в движении перед столкновением, как раз и является тем ключевым элементом, который вносит необратимость в кинетическое уравнение Больцмана.

Чтобы понять, в чем же смысл допущения о молекулярном хаосе, рассмотрим более подробно сценарий движения отдельной молекулы.

На рисунке 13 сплошной линией изображена траектория одной из молекул, а шары 1, 2, 3 описывают потенциал рассеяния молекулы  $M$  на молекулах 1, 2, 3. Радиус каждого шара считаем приближенно равным  $a$ ; средний пробег между соударениями принимаем за  $\lambda = 1/na^2$ . Допустим, что начальная скорость молекулы  $M$  получила некоторое возмущение  $\tilde{v}$ , так что ее траектория пошла по пунктирной линии, отклоняющейся на угол  $\gamma_0 = \tilde{v}/v_T$  относительно прежней траектории.



**Рис. 13.** Молекула  $M$  последовательно сталкивается с молекулами 1, 2, 3. Если скорость начального движения немного возмущена (штриховая линия), то отклонения от начальной траектории быстро нарастают от удара к удару.

Легко видеть, что при следующем ударе этот угол возрастет в  $\lambda/a$  раз, а после  $k$ -го удара он будет порядка  $\gamma_0(\lambda/a)^k$ . Обозначая через  $s \cong k\lambda$  среднюю длину

вдоль траектории и полагая  $s = vt$ , мы получим соотношение

$$\gamma = \gamma_0 \exp(\kappa t) \quad (162)$$

где величина

$$\kappa = \frac{v}{\lambda} \ln \frac{\lambda}{a}$$

называется энтропией Колмогорова—Синяя.

Отсюда видно, что даже при очень малом начальном возмущении  $\gamma_0 \ll 1$  величина  $\gamma$  достигает значения порядка единицы при

$$k = \frac{s}{\lambda} \cong \ln \frac{1}{\gamma_0} \left( \ln \frac{\lambda}{a} \right)^{-1}.$$

Далее штриховая траектория будет наталкиваться на совсем другие молекулы. Таким образом, движение молекулы в газе оказывается крайне чувствительным к начальным возмущениям.

Покажем теперь, что кроме начальных возмущений существуют возмущения, вносимые внешним окружением. Для этого учтем те тепловые флуктуации, которые отвечают коллективным степеням свободы. Если нет неупругих взаимодействий молекул со стенками, то эти флуктуации являются составной частью движения системы из  $N$  частиц в  $6N$ -мерном фазовом пространстве. Другими словами, их следовало бы считать обратимыми. В рамках гидродинамического

приближения коллективные флуктуации создаются случайной составляющей члена столкновений, а соответствующая энергия флуктуаций составляет величину порядка  $\varepsilon^2$  от тепловой энергии. При наличии неупругих столкновений со стенками появляется новый источник теплового шума, который по мощности как бы эквивалентен шуму от пристеночного слоя газа толщиной  $\lambda/L$ . Следовательно, доля шума от внешнего источника составляет величину

$$\xi = \varepsilon^2 \frac{\lambda}{L} \ll 1.$$

Другими словами, возмущения масштаба

$$\gamma_0 \approx \frac{\tilde{v}}{v_T} \sim \varepsilon \left( \frac{\lambda}{L} \right)^{1/2}$$

вносятся извне, т.е. они являются абсолютно случайными и неконтролируемыми. Отсюда видно, что после

$$k = \ln \frac{1}{\gamma_0} \left( \ln \frac{\lambda}{a} \right)^{-1} = \ln \left[ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^{1/2} \right] \left( \ln \frac{\lambda}{a} \right)^{-1}$$

ударов начальные условия полностью забываются, так что ни о какой обратимости не может быть и речи.

Оценим величину  $k$  для воздуха. При этом (в системе СГС) имеем  $n = 3 \times 10^{19}$ ,  $a^2 = 10^{-15}$ ,  $\lambda = 3 \times 10^{-5}$ ,  $\varepsilon = na^3 = 10^{-3}$ , так что при  $L = 1$  получаем приближенно  $k \sim 2$ . После первых двух-трех ударов корреляция движения молекул полностью теряется! Таким образом, самый простой механизм возбуждения звукового шума стенками достаточен для того, чтобы неустойчивость траекторий частиц привела к молекулярному хаосу в самых обычных условиях воздуха при нормальных температуре и давлении. Малое взаимодействие газа со стенками достаточно для того, чтобы в нем осуществлялся молекулярный хаос и, как следствие этого хаоса, — необратимое приближение к равновесию.

Чтобы учесть количественно (но приближенно) влияние внешнего окружения, в кинетические уравнения следует добавить малые дополнительные слагаемые. Рассмотрим сначала уравнение (160) для микроскопической функции  $F_\mu$ . Наличие внешних возмущений приводит к тому, что при каждом столкновении молекул возникает дополнительная неточность в параметрах удара масштаба  $\xi$ . Другими словами, при каждом столкновении вносится случайное искажение отлетающей траектории масштаба  $\xi$ . Можно сказать, что на

каждую из молекул действует дополнительная случайная сила, которая со средней частотой  $\nu$ , равной частоте парных столкновений, вносит дополнительные толчки. Эта ситуация в точности соответствует уравнению Ланжевена (79), и поэтому усредненный результат этих толчков можно учесть в точности так же, как это было сделано при выводе уравнения (84) с учетом соотношения Эйнштейна (83). Следовательно, в правую часть уравнения (180) нужно добавить дополнительный член

$$Kf = D_v \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{\mathbf{v}}{v_T^2} f + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right),$$

где  $D_v = \xi^2 v_T^2 \nu$  — коэффициент диффузии в пространстве скоростей,  $v_T^2 = T/m$ .

Оператор  $K$  имеет диффузионный характер в пространстве скоростей. Действуя на функцию  $F_\mu$ , он приведет к уширению  $\delta$ -функций, так что со временем неопределенность  $(\Delta v)^2$  вблизи каждой из  $\delta$ -функций будет линейно возрастать со временем, т.е.  $\Delta v \sim v_T (\xi^2 \nu t)^{1/2}$ . За время  $t \sim \tau = 1/\nu$  эта неопределенность составит малую величину  $\Delta v \sim \xi v_T$ , т.е. мы получаем ту же оценку, что и для  $\tilde{v}$ . Последующие столкновения с разбегающимися траекториями приводят к гораздо более быстрому уширению локализованных "комочков" в (159), возникающих от усреднения  $F_\mu$  по "толчкам" со стороны внешнего окружения. Если локализация отдельных компонент  $\langle F_\mu \rangle$  станет масштаба  $a$ , то выражением (161) для ускорения частиц пользоваться уже нельзя из-за того, что в процессе столкновения усредненное значение  $\langle F_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) F_\mu(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \rangle$  нельзя считать равным произведению усредненных значений функций  $F_\mu$ . Как обходить эту трудность, хорошо известно: нужно считать, что функции  $F_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и  $F_\mu(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  не коррелированы перед ударом. И тогда усредненное значение от третьего слагаемого в (160) автоматически приводит к уравнению Больцмана. Таким образом, классический "молекулярный хаос" создается фактически внешним миром, а затем он многократно усиливается движением молекул.

Случайное вмешательство внешнего окружения нетрудно учесть и в уравнении Лиувилля (155), добавляя в него соответствующие дополнительные слагаемые. Нетрудно видеть, как выглядят эти слагаемые. В самом деле, если взять в качестве решения уравнения (155) микроскопическую функцию

$$W_\mu = \prod_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i(t)),$$

то согласно приближению Ланжевена мы должны учесть дополнительную диффузию по скоростям у каждой из частиц. Поэтому обобщенное уравнение Лиувилля следует записать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i^N \mathbf{v}_i \nabla_i W + \sum_i^N \mathbf{g}_i \frac{\partial W}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{K} W \equiv D_v \sum_i^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_i} \left( \frac{m \mathbf{v}_i}{T} W + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{v}_i} \right). \quad (163)$$

Как мы видим, диффузионный оператор  $\mathbf{K}$  приводит к уширению во времени локализованной функции  $W_\mu$ . Можно сказать, что  $\mathbf{K}$  представляет собой оператор рождения энтропии со стороны внешнего мира. Необходимость учета микроскопической необратимости была указана И. Пригожиным [53]. В его подходе также используется оператор рождения энтропии  $M$ , имеющий сходный с оператором  $\mathbf{K}$  смысл (мы используем обозначение  $\mathbf{K}$  только потому, что символом  $M$  мы условились обозначать оператор измерения). В отличие от подхода И. Пригожина, в соотношении (163) представлена явная форма оператора  $\mathbf{K}$ .

Наличие оператора  $\mathbf{K}$  качественно меняет структуру уравнения (163). Это уравнение перестает быть обратимым: диффузия по скоростям, сколь бы медленной она ни была, делает уравнение (163) параболическим с возрастанием энтропии только в одну сторону — от прошлого к будущему. Согласно (163) вероятность  $W$  не просто переносится вдоль траекторий, но еще и слабо диффундирует в пространстве скоростей. В результате этого и появляется возможность говорить о "молекулярном хаосе", т.е. о "размешивании" функции распределения  $W$  в многомерном фазовом пространстве.

### 34. Необратимость классическая и квантовая

Необратимость является универсальной сущностью Мира, относящейся не только к жизни, но и ко многим простым физическим явлениям природы. Не будет преувеличением сказать, что мы погружены в необратимый поступательно эволюционирующий Мир. Однако классические законы механики являются обратимыми во времени. Обратимыми являются также основные уравнения квантовой механики. Поэтому вопрос о том, как из обратимых уравнений динамики может быть получено описание необратимых процессов, многократно обсуждался и продолжает обсуждаться в физической литературе. Нам не хотелось бы комментировать здесь все высказанные по этому поводу точки зрения. Наша задача будет гораздо проще: взяв в качестве примера одну из простейших физических систем с присущей ей внутренней необратимостью, мы постараемся более

тщательно проанализировать логическую схему рассуждений, приводящих к теоретическому описанию необратимости. В качестве такой простейшей системы мы выберем разреженный газ из слабо взаимодействующих атомов. Будем считать, что газ заключен в замкнутый сосуд и может находиться в тепловом равновесии, в том числе с равномерно нагретыми стенками сосуда.

Как известно, поведение такого газа описывается кинетическим уравнением Больцмана для функции распределения частиц  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , где  $\mathbf{r}$  — координата (трехмерный вектор), а  $\mathbf{v}$  — скорость частицы. Все частицы считаются имеющими одну и ту же функцию распределения, так что  $F = n f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , где  $n$  — плотность частиц, а  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — одночастичная функция распределения.

Свое кинетическое уравнение Больцман вывел с помощью одного лишь вполне естественного допущения: атомы газа считаются некоррелированными перед их парными соударениями. Больцман назвал это допущение гипотезой о "молекулярном хаосе". Эта гипотеза кажется вполне естественной, хотя она никак не следует из молекулярной динамики.

Как оказалось, одной лишь этой гипотезы вполне достаточно, чтобы явно ввести физическую необратимость: согласно знаменитой  $H$ -теореме кинетическое уравнение описывает необратимую релаксацию газа к термодинамическому равновесию с монотонным возрастанием энтропии со временем. Возникает вопрос о том, какое же физическое явление стоит за гипотезой о молекулярном хаосе, и как это явление может быть рассмотрено в рамках более строгого логического обоснования. Именно этот вопрос мы и обсудим в данном разделе. Сначала мы рассмотрим газ классических частиц, а затем обсудим более точное квантовое описание поведения атомов.

В приближении классических частиц атомы можно представлять себе как маленькие твердые шарики, упруго сталкивающиеся между собой. Если диаметр шариков составляет величину  $d$ , то столкновения происходят при величине параметра удара, меньших  $d$ . Это значит, что поперечное сечение рассеяния равно  $\sigma = \pi d^2$ , а средняя длина свободного пробега  $\lambda = 1/n\sigma$ , где  $n$  — средняя плотность атомов. Газ считается разреженным, если  $\lambda \gg \sqrt{\sigma}$ , т.е.  $n\sigma^{3/2} \ll 1$ .

Допустим сначала, что газ заключен в сосуд объема  $V$  с идеально отражающими зеркальными стенками. Полное число атомов в объеме  $V$ , равное  $N = nV$ , будем считать очень большим числом:  $N \gg 1$ . Легко видеть, что такая система упруго взаимодействующих частиц является полностью обратимой во времени. В самом деле, потенциал взаимодействия частиц между собой и со стенками сосуда зависит только от координат, поэтому уравнения Ньютона не меняют своего вида при

замене  $t$  на  $-t$ . Это значит, что при любом стартовом состоянии при  $t = 0$  система классических упругих частиц проэволюционирует к моменту времени  $t$  к такому состоянию, что при обращении времени система в точности повторит свою эволюцию в обратном порядке. Разумеется, такое "обратное кино" можно реализовать и просто мгновенным преобразованием скоростей  $v_i \rightarrow -v_i$  у каждой  $i$ -й частицы из полного набора  $N$  частиц. Итак, молекулярная механика газа обратима во времени, что явно не согласуется с нашими житейскими представлениями.

Как было показано в разделе 33, траектория движения любой пробной частицы очень чувствительна к тому, где именно и с какими именно другими частицами происходят парные столкновения. Поэтому такая траектория является хаотической, а соответствующий процесс принято называть динамическим хаосом. В нашем случае динамический хаос связан с большим числом партнеров, участвующих в столкновениях. Но хорошо известно, что динамический хаос может иметь место и в системах с небольшим числом степеней свободы.

Динамический хаос сам по себе еще не является основанием для появления необратимости. Какой бы сложной ни была эволюция системы из прошлого в будущее, замкнутая система классических частиц обязательно проходит в обратном порядке по той же самой траектории в фазовом пространстве при замене  $t$  на  $-t$ . Поэтому необратимость не является прямым следствием хаоса, хотя косвенным образом она с этим хаосом может быть связана.

Чтобы продвинуться дальше, нам нужно рассмотреть еще одну особенность хаотических систем, а именно, разбегание траекторий в фазовом пространстве. Из рисунка 13 видно, что близкие вначале траектории экспоненциально быстро разбегаются друг от друга. Именно это разбегание траекторий и приводит в конце концов к необратимости.

Как мы установили выше, в замкнутой системе классических частиц никакой необратимости нет. Однако достаточно присутствие ничтожно малых внешних возмущений, чтобы такая необратимость появилась. Как следует из оценок раздела 33, достаточно иметь смещение одного из сталкивающихся атомов всего лишь порядка  $\xi \sim a^2/\lambda = \sigma/\lambda$ , чтобы уже за один-два удара их траектории стали совершенно не похожими на исходные траектории при  $\xi = 0$ . Величина  $\xi \sim \sigma/\lambda$  ничтожно мала: например, в обычном воздухе при атмосферном давлении  $\xi \sim 10^{-15}/\lambda \sim 10^{-11}$  см. Если мы предположим, что газ находится в более или менее обычном сосуде, т.е. с возможностью теплообмена со стенками из-за неупругих столкновений, то смещения

такого масштаба вполне естественны даже далеко от стенок. Вблизи от стенки неупругие столкновения атомов со стенкой могут приводить к смещениям масштаба  $\lambda$ , а затем возмущения переносятся в глубь газа либо диффузионным образом, либо звуковым шумом, который генерируется вблизи стенок из-за неупругих столкновений. Такие столкновения вносят дополнительное затухание звуковых волн, а стало быть, согласно флуктуационно-диссипационной теореме пристеночные слои газа должны генерировать дополнительный звуковой шум. Этот шум может создавать смещения атомов внутри газа и тем самым перебрасывать их с одних неустойчивых траекторий на другие.

Именно внешние возмущения и создают необратимость. Мы можем рассматривать их как некоторый хаотический шум. Таким образом, молекулярная динамика может рассматриваться как своеобразный "усилитель хаоса" приходящего извне шума. "Усилитель" имеет огромный коэффициент усиления. Число ударов, необходимых для сбоя траекторий, всего лишь логарифмически зависит от интенсивности внешнего шума, поэтому даже очень малое взаимодействие с внешним окружением радикально меняет поведение атомов газа. Все далекие корреляции атомов очень быстро разрушаются: для этого достаточно всего лишь одного-двух характерных времен парных столкновений. Соответственно, поведение атомов с одними и теми же начальными скоростями становится однотипным: они движутся и сталкиваются с другими атомами по одним и тем же статистическим законам. В результате этого многочастичная функция распределения распадается в произведение одночастичных функций распределения, для которых справедливо уравнение Больцмана.

Итак, строго говоря, молекулярный хаос в газе классических частиц создается внешним окружением. Ясно, что поведение такого газа становится необратимым: мы могли бы обратить скорости молекул внутри рассматриваемого нами объема, но внешнее окружение находится вне нашего контроля. Поэтому обратимость при  $t \rightarrow -t$  может существовать не более одного или нескольких средних времен столкновений, а затем газ снова забудет о своем начальном состоянии и его эволюция будет в точности такой же, как и при  $t > 0$  (но с обратными газодинамическими скоростями).

Как мы видим, для возникновения необратимости нет необходимости в передаче или изъятии энергии из газа. Для хаотизации траекторий достаточно лишь наличия малых смещений атомов, т.е. своего рода "сбоя фаз" в процессах парных столкновений. Необратимость — это явление, не связанное с изменением энергии.

Чтобы лучше понять, что такое классическая необратимость, рассмотрим идеализированный мысленный эксперимент. Пусть газ с



плотностью атомов  $n$  находится в сферическом сосуде радиуса  $R$  с зеркальными стенками. Ясно, что такой газ является идеальной механической системой с полной обратимостью движения во времени. Допустим теперь, что стенки сосуда очень тонкие и что снаружи от сосуда находится точно такой же газ с той же средней скоростью теплового движения атомов и при той же самой плотности  $n$ . Пусть оба газа в среднем покоятся. Допустим, что внешний газ находится в состоянии теплового равновесия, а его взаимодействие с внешним Миром устроено так, что внутри него устанавливается молекулярный хаос. Будем считать, что длина свободного пробега  $\lambda$  гораздо меньше радиуса сосуда  $R$ .

Пусть в момент времени  $t = 0$  оболочка, разделяющая два газа, исчезает. Тогда возникает начальный разрыв, разделяющий два газа: внешний газ, находящийся в тепловом равновесии, и внутреннюю систему атомов, испытывающих сложное, полностью обратимое движение. Ясно, что тепловое хаотическое движение внешнего газа вместе с акустическим тепловым шумом должны приводить к хаотизации траекторий атомов внутреннего газа. Одного удара хаотизированного газа достаточно для сбоя фазы траектории атома внутреннего газа. Соответственно, внутрь области с обратимым движением атомов начнет распространяться фронт необратимости (рис. 14). Перед фронтом движение газа еще обратимо, а за фронтом необратимо. Другими словами, внутрь газа распространяется фронт разрушения обратимости.

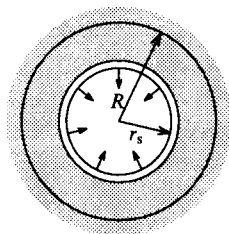


Рис. 14. Фронт необратимости радиуса  $r_s$  схлопывается к центру со скоростью звука после того, как исчезает оболочка радиуса  $R$ , разделявшая внутренний обратимый газ от необратимого внешнего окружения.

Как известно, любой перемещающийся слабый разрыв в газе распространяется со скоростью звука  $c_s = \sqrt{\gamma T/m}$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $T$  — температура,  $m$  — масса атомов. Соответственно, радиус сферы  $r_s$  с обратимым движением внутри будет схлопываться по закону  $r_s = R - c_s t$ . При  $t = R/c_s$  область обратимости исчезает. За движущимся фронтом остается равновесный газ с обычной случайностью траекторий атомов и с разрушенными далекими корреляциями между их движением. На самом фронте, шириной масштаба  $\lambda$ , происходит разрушение корреляций в движении атомов. А перед фронтом имеется классическая механическая система с совершенно определенной и, стало быть, единственной

траекторией в фазовом пространстве. Замена  $t$  на  $-t$  в такой системе меняет просто направление движения системы по траектории. Соответственно, мы должны считать, что никакого неупорядоченного движения внутри сферы радиуса  $r_s$  нет. Это значит, что энтропия системы атомов внутри сферы радиуса  $r_s$  равна нулю. А сразу же после прохождения фронта у равновесного газа появляется энтропия  $S$  (на единицу объема), которая может быть рассчитана по известным расчетам статистической физики.

Итак, главный физический процесс, происходящий на движущемся фронте, состоит в рождении энтропии от нуля до величины  $S$  на единицу объема. Процесс рождения энтропии необратим, поэтому фронт необратимости может двигаться только в одну сторону — в сторону обратимой механической системы частиц с нулевой энтропией.

Теперь нам осталось понять, как и из чего рождается энтропия. Для этого воспользуемся знаменитой формулой Больцмана

$$S = k \ln \Gamma. \quad (164)$$

Здесь  $\Gamma$  есть число возможных микроскопических состояний системы при фиксированных макроскопических параметрах, например, плотности и температуры газа. А параметр  $k$ , получивший название постоянной Больцмана, возник только потому, что температура измеряется в кельвинах, а энергия атомов — в эргах (или джоулях). Если условиться измерять температуру в тех же самых энергетических единицах, что и энергию атомов, то следует положить  $k = 1$ . Этот выбор единиц нам более удобен, так что в формуле (164) мы будем считать  $k = 1$ .

Как известно, в классической механике число состояний  $\Gamma$  не определено точно. Но если, следуя принципу неопределенности  $\Delta x \Delta p \approx \hbar$ , разбить все фазовое пространство на дискретные ячейки размером  $\Delta x \Delta p$ , так что  $\Delta x \Delta p \approx \hbar$ , то величина  $\Gamma$  становится вполне определенной.

Условимся использовать это же самое дискретное ячеестое пространство и для описания механического движения системы классических частиц. Тогда мы сразу же сталкиваемся с понятием информации. Рассмотрим нашу механическую систему атомов в некоторый фиксированный момент времени. В этот момент ее фазовая точка находится в одной единственной ячейке из  $\Gamma$  возможных ячеек. Можно сказать, что вероятность попадания в данную ячейку равна  $p = 1/\Gamma$ . Если учитывать все возможные ячейки, то систему атомов можно рассматривать как запоминающее устройство с информацион-

ной емкостью

$$I = -\ln p = \ln \Gamma. \quad (165)$$

Именно такую информацию имеет классическая система атомов в любой момент времени. При эволюции во времени фазовая точка движется по очень узкой (шириной в одну ячейку) нити в фазовом пространстве, так что ее информация сохраняется.

В соотношении Шеннона (165) информация измеряется в "натах", а не в битах, так что становится очевидной связь этого выражения с энтропией (164) при  $k = 1$ . Если информация полностью стирается, то система атомов может попадать в любую из возможных ячеек, число которых равно  $\Gamma$ . При этом возникает совершенно хаотическое тепловое движение.

Итак, на фронте необратимости происходит полное стирание информации и превращение ее в энтропию. Перед фронтом мы имеем механическую систему с полностью детерминированным поведением во времени, а за фронтом — хаос теплового движения. Подчеркнем еще раз, что хаос теплового движения создается ничтожно малыми шумами из необратимого внешнего окружения. Динамика атомов газа многократно усиливает этот хаос и превращает его в молекулярный хаос теплового движения.

Теперь мы можем обсудить некоторые вопросы, встречающиеся в различного рода учебниках по термодинамике и статистической физике, или просто в популярных статьях по физике. Например, один из часто задаваемых вопросов звучит так: существует ли мгновенная температура? Как это ни парадоксально, но для газа классических частиц ответ должен быть отрицательным: мгновенной температуры не существует.

В самом деле, любое мгновенное состояние системы классических частиц можно рассматривать как точно заданное, т.е. с нулевой энтропией и полной информацией  $I = \ln \Gamma$ . Поэтому понятия мгновенной температуры ввести нельзя (можно считать ее равной нулю, но это мало что значит). И только при наличии слабых внешних возмущений, усиливаемых парными столкновениями частиц, по прошествии промежутка времени, порядка среднего времени столкновений, наступает реальный молекулярный хаос с соответствующей температурой, являющейся мерой хаотического теплового движения. При этом любая начальная информация исчезает, а энтропия достигает своего максимального значения  $S = \ln \Gamma$ . Именно такой процесс появления температуры с одновременным превращением информации в энтропию происходит в узком слое фронта необратимости на рис. 14.

Второй, часто задаваемый вопрос: почему можно пользоваться статистическим подходом к описанию поведения газа классических частиц? Ответы бывают разные. Иногда говорится, что статистическое описание используется из-за незнания точных начальных данных. Встречается также утверждение, что статистика используется из-за невозможности проинтегрировать уравнения движения для огромного числа частиц. Нетрудно видеть, что ни первое, ни второе утверждения нельзя признать вполне правильными.

Начнем со второго. В обычном воздухе при атмосферном давлении в объеме порядка  $\lambda^3$  находится  $N = 1/\sigma^3 n^2 \sim 10^8$  частиц. Это, разумеется, много, но не слишком много. Энтропия  $S = \ln \Gamma$  для  $N$  молекул газа при комнатной температуре равна приблизительно  $S \cong \cong N \times 30 = 3 \times 10^9$ . Следовательно, информация начального состояния измеряется гигабайтами, что вполне под силу современному компьютеру. А суперкомпьютер имеет возможность просчитать эволюцию молекул газа в течение некоторого числа парных столкновений. Так что при желании и необходимости можно моделировать динамику газа в приближении укрупненных частиц.

Более того, Майоров и др. [54] методом динамики многих частиц, т.е. путем численного решения системы уравнений Ньютона для совокупности точечных зарядов в замкнутом объеме с зеркально отражающими стенками показали, что процесс рекомбинации переохлажденной плазмы сильно замедляется. В результате устанавливается стационарное состояние, отличное от термодинамически равновесного. Другими словами, без внешних шумов термодинамическое равновесие может не достигаться.

Рассмотрим теперь первое утверждение. Строго говоря, незнание начальных данных не дает еще никаких оснований для использования вероятностного описания. Ведь это описание применяется не ко многим повторяющимся измерениям, а к одной единственной системе. Будучи замкнутой, такая система движется по одной единственной траектории в фазовом пространстве. Замена такой системы на ансамбль систем с несколько различными начальными данными не только не является логически обоснованным, но и приводит к определенным логическим трудностям.

В самом деле, неопределенность начальных данных можно учесть тем, что при  $t = 0$  в фазовом пространстве создается "капля" функции распределения. При дальнейшей эволюции замкнутой системы каждая точка такой капли движется по единственной строго определенной траектории. Траектории разбегаются, так что очень скоро в фазовом пространстве образуется "вата" или "паутина", заполненная точками начальной функции распределения. Чтобы упростить описание этой

"ваты", обычно предлагается производить "крупнозернистое усреднение". Но эта последняя операция ниоткуда не следует и является искусственной, будучи навязанной извне. Только реальное нарушение траекторий внешним шумом создает условия для такого усреднения.

Итак, мы еще раз можем сделать заключение о том, что необратимость газа классических частиц и возможность его статистического описания определяются очень малым взаимодействием системы с необратимым внешним окружением. Столкновения частиц многократно усиливают возмущения внешнего хаоса и уничтожают далекие корреляции в движении частиц. В результате движение частиц становится однотипным: любая из частиц ведет себя сходным образом, приобретая одночастичную вероятностную функцию распределения. Именно для такой функции и формулируется уравнение Больцмана.

Макроскопические характеристики газа могут вести себя сходным образом как в замкнутой, так и в контактирующей с внешним миром системах. Но чтобы гипотеза о молекулярном хаосе была логически обоснованной, требуется допустить, что у рассматриваемого газа имеется очень малое взаимодействие с необратимым внешним миром. Замкнутые и незамкнутые системы сильно различаются с логической точки зрения.

Квантовая необратимость сильно отличается от классической необратимости, но рассуждения предыдущего раздела могут помочь выяснению и этой проблемы.

Допустим, что мы имеем замкнутую систему из бозе-атомов в сосуде с зеркально отражающимися стенками. Будем считать, что температура газа значительно выше температуры вырождения, так что поведение атомов может быть близким к классическому. Нетрудно видеть, что в замкнутой системе опять имеет место полная обратимость. В самом деле, поведение такой системы описывается уравнением Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi. \quad (166)$$

Здесь  $\hbar$  — постоянная Планка,  $H$  — гамильтониан, а  $\psi$  — волновая функция, симметричная по  $N$  переменным  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ .

Согласно (166) волновая функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{r}$  — совокупность всех  $N$  переменных  $\mathbf{r}_i$ , может быть найдена по ее начальному значению  $\psi(\mathbf{r}, 0)$  с помощью операции

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left\{-\frac{iHt}{\hbar}\right\} \psi(\mathbf{r}, 0). \quad (167)$$

Матрица  $U(t) = \exp\{-iHt/\hbar\}$  является унитарной, так что  $U^{-1}(t) = \exp\{iHt/\hbar\}$ . Соответственно, имеет место соотношение

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = U^{-1}(t)\psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left\{\frac{iHt}{\hbar}\right\} \psi(\mathbf{r}, t). \quad (168)$$

Другими словами, функция  $\psi(\mathbf{r}, 0)$  может быть найдена по заданной  $\psi(\mathbf{r}, t)$  с помощью соотношения (167), но с обратным временем:  $t \rightarrow -t$ . Таким образом, соотношения (167), (168) соответствуют утверждению о полной обратимости замкнутой квантовой системы.

Следовательно, необратимость может возникнуть только в результате слабого взаимодействия рассматриваемой системы с необратимым внешним окружением.

Чтобы понять, как возникает необратимость в газе квантовых частиц, удобно начать с рассмотрения некоторого мысленного эксперимента в замкнутой системе. Допустим, что в некоторый начальный момент времени  $t = 0$  волновая функция  $N$  частиц имеет общий вид  $\psi(\mathbf{r}, 0)$ , где  $\mathbf{r}$  — совокупность  $N$  координат вида  $\mathbf{r}_i$ . Выберем некоторую пробную частицу, например, с координатой  $\mathbf{r}_1$ . Чтобы избежать усложнений, связанных с тождественностью частиц, допустим, что пробный атом имеет ядро-изомер, т.е. полной тождественности данного атома с другими нет, хотя массы всех атомов одинаковы. Представим теперь функцию  $\psi(\mathbf{r}, 0)$  в виде суперпозиции

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \sum_j C_j \psi_j(\mathbf{r}_1). \quad (169)$$

Здесь каждая из функций  $\psi_j(\mathbf{r}_1)$  выбрана в виде волнового пакета с некоторым номером  $j$ , а коэффициенты  $C_j$  представляют собой волновые функции всех оставшихся атомов в выбранном нами состоянии с волновой функцией  $\psi_j(\mathbf{r}_1)$  у первого атома.

Выберем ширину локализации  $L$  волнового пакета  $\psi_j(\mathbf{r}_1)$  таким образом, чтобы пакет не очень сильно уширялся за время  $\tau = \lambda/v_T$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега, а  $v_T$  — средняя ("тепловая") скорость атомов. Согласно соотношению неопределенностей

$$\Delta p \Delta x \approx \hbar, \quad (170)$$

неопределенность скорости в пакете шириной  $\Delta x \sim L$  составляет величину  $\Delta v \sim \hbar/mL$ , где  $m$  — масса атома. Наше условие  $\tau \cdot \Delta v \approx L$  приводит, таким образом, к приближенному соотношению

$$L^2 \cong \lambda \lambda_B, \quad (171)$$

где через  $\lambda_B$  обозначена длина волны де Бройля:  $\lambda_B = \hbar/mv_T$ .

Рассмотрим теперь, что происходит с волновым пакетом  $\psi_j(\mathbf{r}_1, t)$  со временем. В разреженной газе он движется, в основном, свободно, испытывая слабые рассеяния на других атомах. За время  $\tau = \lambda/v_T$  начальный пакет практически полностью превратится в рассеянные волны. Эти волны испытывают вторичные рассеяния, затем третичные и т.д. Давайте опять "обернем время", т.е. заменим  $t$  на  $-t$ . Тогда все рассеянные расходящиеся волны превратятся в сходящиеся волны, а вся эволюция волн будет происходить в обратном порядке, пока они не сольются в исходный волновой пакет  $\psi_j(\mathbf{r}_1, 0)$ . Отсюда следует, что в обратимой системе квантовых частиц должны в равной мере присутствовать как расходящиеся (рассеянные) волны, так и сходящиеся волны. Волновая функция такой системы представляет собой очень сложную и очень нежную конструкцию из точно коррелированных сходящихся и расходящихся волн.

Допустим теперь, что рассматриваемый нами газ находится в слабом взаимодействии с необратимым внешним окружением. Первый и главный эффект от такого взаимодействия состоит в разрушении точных фазовых соотношений между сходящимися и расходящимися волнами. Происходит, как говорят, сбой фаз. Ясно, что такое нарушение фаз скажется прежде всего в исчезновении сходящихся волн, как это имеет место при излучении волн в обычной классической электродинамике.

Следует подчеркнуть, что под расходящимися и сходящимися волнами мы имеем в виду эстафетно расходящиеся или сходящиеся волны при многих последовательных рассеяниях одной и той же частицы на других частицах. Их не следует путать с принятым в теории рассеяния подходом представления волн в виде суперпозиции сходящихся и расходящихся волн при однократном рассеянии.

Математически исключение сходящихся волн можно было бы учесть в виде малого затухания рассеянных волн на больших расстояниях от точки рассеяния. В квантовой механике такого рода подход используется в оптической модели ядра, когда при рассеянии нейтрона ядро рассматривается просто как шарик из серого вещества. В основе этого подхода лежит гипотеза о том, что волновая функция "запутавшегося" в ядре нейтрона не способна вступать в суперпозицию с налетающей волновой функцией свободного нейтрона.

В газе квантовых частиц также естественно предположить, что исходная волновая функция  $\psi_j(\mathbf{r}_1)$  постепенно исчезает на длине  $\sim \lambda$ , превращаясь в рассеянные волны. Но этого мало. Квантовая частица не может проявлять себя одновременно во многих областях пространства в условиях, когда когерентность между этими областями полностью разрушена. Поэтому необходимо принять как аксиоматическое

утверждение, что по прошествии некоторого промежутка времени порядка нескольких времен рассеяния волновая функция частицы может быть отличной от нуля только в некоторой ограниченной области пространства. На рисунке 15 эта область отмечена буквой  $D$ .

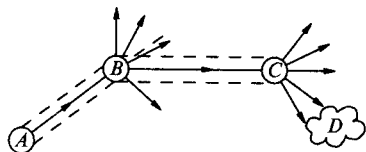


Рис. 15. Волновой пакет  $A$  рассеивается на втором атоме в области  $B$ , а затем одна из рассеянных волн рассеивается в области  $C$  на третьем атоме. Пусть в области  $D$  происходит "широкий коллапс". Тогда, возвращаясь обратно по времени в точку  $A$ , можно воспроизвести движение волнового пакета с последовательными рассеяниями.

Соответствующий эффект можно назвать "коллапсом" волновой функции. Но следует подчеркнуть, что главным здесь является не "стягивание" волновой функции в область  $D$ , а "уничтожение" волновой функции вне некоторой широкой области  $D$ .

В "процессе коллапса" волновая функция частицы искажается и кажется, что искажается очень сильно: ведь она уничтожается в большей области пространства. Но на самом деле динамическое возмущение системы при этом может быть очень мало. Ведь волновая функция устроена так, что не она сама, а средние с весом  $|\psi|^2$  операторы являются физическими величинами. В силу этого волновая функция приобретает скорее информационный, чем динамический характер. Поэтому введение в волновую функцию широкого по пространству форм-фактора локализации может не очень сильно повлиять на динамические свойства (например, на энергию). Но оно может очень сильно повлиять на информационные характеристики волнового поля.

Итак, допустим, что влияние внешнего окружения сводится к тому, что сходящиеся волны исчезают и что волновой пакет пробной частицы рано или поздно окажется собранным в некоторую область  $D$  на рис. 15. Теперь мы можем обратным преобразованием по времени вернуться в исходную область  $A$ . Так как у нас остались только рассеянные волны, то уже в области  $C$  предшествующего рассеяния волновая функция сжимается в пакет размером порядка  $\lambda$  и этот пакет прослеживается из точки  $C$  в  $B$  и из точки  $B$  в  $A$ . В силу эффекта Эйнштейна – Подольского – Розена [18] аналогичный коллапс происходит и у волновых функций атомов, на которых происходило рассеяние. Можно сказать, что любой широкий коллапс в будущем эквивалентен тому, что в настоящем эволюцию волновой функции  $\psi_j(\mathbf{r}_1)$  можно рассматривать как результат свободного движения по прямым отрезкам со случайными рассеяниями в областях  $B$ ,  $C$  и т.д. У



квантовой частицы не только появляются черты классического поведения, но и возникает случайность в каждом акте рассеяния.

Для статистического описания такого квантового объекта естественно ввести матрицу плотности для ансамбля одинаковых систем, т.е. фактически атомов со сходным поведением. При этом диагональные члены одночастичной матрицы плотности, т.е.  $|\psi_j(\mathbf{r}_1)|^2$ , играют роль функции распределения, а эффект "стирания" недиагональных членов соответствует процессу "пакетизации". При таком подходе все атомы ведут себя однотипным образом, а любая "мгновенная" волновая функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$  многих атомов может рассматриваться как случайный набор волновых пакетов, вероятностные характеристики которых описываются кинетическим уравнением для функции распределения и дополнительным уравнением для формы и размеров волновых пакетов.

Итак, мы можем сделать вывод о том, что даже слабое воздействие необратимого окружения может сильно изменить волновую функцию системы квантовых частиц. Вместо сложного когерентного состояния, с обратимой эволюцией во времени, мы получаем набор одночастичных волновых пакетов со случайной необратимой эволюцией. Необратимость возникает на временах, больших среднего времени столкновений, а само различие волновых функций замкнутых и открытых систем может иметь гораздо более сложную пространственно-временную структуру.

Чтобы прояснить этот вопрос, вернемся к рис. 14, но в варианте газа квантовых частиц. Как и в классическом случае, соприкосновение чистого состояния с необратимым внешним окружением приводит к возникновению фронта необратимости, схлопывающегося со скоростью звука. Перед фронтом необратимости имеется сложно организованное обратимое чистое состояние. А за фронтом образуется набор случайных одночастичных волновых пакетов. Такое состояние естественно назвать смешанным состоянием, поскольку поведение каждого из пакетов является случайным и происходит по вероятностным законам. Естественно допустить, что ширина фронта необратимости имеет характерный размер порядка средней длины свободного пробега  $\lambda$ , хотя в общем случае ситуация может быть несколько сложнее, поскольку перед фронтом необратимости могут разрушаться более далекие межатомные квантовые корреляции. Локализация (коллапс) волновой функции любого атома отвечает как бы "измерению" его координаты, и соответственно, волновая функция газа остальных атомов может немедленно прореагировать на это измерение уничтожением части из своих компонент.

Как мы видим, волновые функции замкнутой и открытой систем сильно отличаются друг от друга. В открытой системе волновая функция выглядит как совокупность большого числа волновых пакетов. Такой набор пакетов нельзя считать чистым состоянием общего вида. По этой причине в случае квантовой системы в отличие от классической вполне законно говорить о мгновенной температуре: волновая функция системы в тепловом равновесии заведомо сильно отличается от любого чистого состояния. В любой момент времени ее можно рассматривать как набор волновых пакетов с максвелловским распределением по импульсам.

Точный момент коллапсирования рассеянных волн указать невозможно. Поэтому можно считать, что коллапсирование представляет собой протяженный во времени процесс без фиксации промежуточных состояний. Такой подход отличается от обычной квантовой механики, сформулированной только для обратимых систем.

Необратимость процессов в физических системах, будь то классических или квантовых, продолжает быть предметом дискуссий и разных точек зрения вплоть до настоящего времени. Особенно актуален вопрос о необратимости на границе между классическими и квантовыми системами, в частности, при измерении квантовых систем. Общепринятой теории квантовых измерений пока не существует, и главную трудность в ее построении представляет теория необратимых явлений.

Разреженный газ при не очень низкой температуре представляет собой наиболее удобный объект для обсуждения проблем необратимости. Необратимость классического газа рассматривалась со многих точек зрения, начиная с выдающихся работ Больцмана. Необратимость в квантовом газе также является предметом достаточно глубокого теоретического анализа. Необходимость рассмотрения необратимости на микроуровне, т.е. в квантовых процессах, многократно подчеркивалась Пригожиным и его сотрудниками [53, 55, 56]. Они обращают особое внимание на то, что классический предел разреженного газа соответствует классическому хаосу с разбегающимися траекториями в фазовом пространстве без интегралов движения. Соответственно, они пытаются развить такой математический аппарат для их описания, который автоматически приводил бы к коллапсам волновых функций.

Здесь мы рассматриваем проблему необратимости на уровне наглядного описания с помощью мысленных экспериментов. Наибольшее внимание уделено логической схеме построения соответствующих рассуждений. Эти рассуждения неотвратно приводят к выводу, что истоки необратимости лежат за пределами рассматривае-

мой системы многих атомов. Как мы видели, разреженный газ является очень эффективным усилителем внешних шумов. В газе классических частиц такое "усиление хаоса" возникает из-за неустойчивости траекторий атомов. А в квантовом случае влияние внешнего окружения в виде "затравочного коллапса" в будущем приводит к распадению волновой функции в набор волновых пакетов, похожих на "уширенные" классические частицы. Взаимодействие таких пакетов между собой выглядит как случайный процесс парных столкновений, описываемый с помощью кинетического уравнения для одночастичной функции распределения

### 35. Приближение к равновесию и коллапсы

Многие из тех процессов, с которыми мы познакомились выше, представляют собой процессы релаксации, т.е. приближения к термодинамическому равновесию либо в системах, исходно находившихся очень далеко от равновесия, либо в системах, выведенных из равновесия другими процессами релаксации. Попробуем обсудить их с некоторой общей точки зрения. Начнем с самого простого примера одной частицы в потенциальной яме (рис. 16).

Если поместить классическую частицу  $M$  в потенциальную яму на рис. 16а, то эта частица будет совершать периодические колебания с монотонно уменьшающейся амплитудой из-за силы трения. Энергия колебаний  $\varepsilon$  постепенно передается среде, пока эта энергия не достигнет уровня тепловых колебаний, равного температуре среды  $T$ .

Совершенно очевидно, почему так происходит. Ведь отклоняя частицу  $M$  от положения равновесия, мы сообщаем ей большую энергию, т.е. "загоняем" в одну степень свободы энергию  $\varepsilon$ , гораздо большую, чем температура. Если эту же самую энергию мы бы просто перевели в тепловую энергию среды, то мы увеличили бы энтропию среды на величину  $\Delta S = \varepsilon/T$ . Следовательно, наше исходное состояние является сильно неравновесным и имеет неэнтропию  $\varepsilon/T$ . Самый простой сценарий исчезновения этой неэнтропии — это диссипация

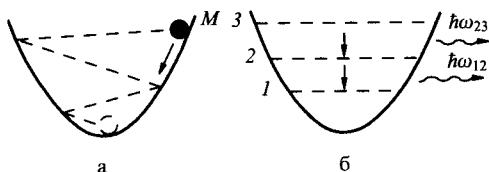


Рис. 16. Классическая материальная точка  $M$  в потенциальной яме (а) совершает слабо затухающие колебания и передает свою энергию внешней среде. Квантовая частица (б) может передавать энергию среде путем испускания квантов излучения.

энергии упорядоченных колебаний точки  $M$  просто в тепло, что и происходит за счет сил трения.

Разумеется, возможны и более сложные сценарии такого перехода. Например, точку  $M$  можно было бы использовать как гирию для приведения в движение маятниковых часов, и тогда процесс диссипации энергии в тепло, т.е. исчезновения негэнтропии, сопровождался бы вращением стрелок и шестеренок часового механизма.

Вблизи доньшка потенциальной ямы (рис. 16а) точка  $M$  совершает тепловые колебания. Эти колебания можно описывать по Ланжевону, т.е. к силе трения можно добавить случайные толчки от внешней среды. Тогда в среднем частица будет иметь полную энергию, равную  $T$ .

Рассмотрим теперь квантовую частицу (рис. 16б). Энергия такой частицы квантуется. Например, в гармоническом потенциале энергия уровня с номером  $n$  равна  $\varepsilon_n = \hbar\omega_0(1/2 + n)$ , где  $\omega_0$  — частота осциллятора. Начальное состояние частицы не обязательно должно соответствовать только одному уровню. Например, в случае гармонического осциллятора можно строить так называемые когерентные состояния из суперпозиции волновых функций разных уровней. Но и в более сложном случае ангармонического осциллятора можно выбрать в качестве начальной волновой функции любую суперпозицию собственных функций. Однако специфика выбора довольно быстро проявится в дальнейшей эволюции.

Дело в том, что каждому уровню номера  $n$  отвечает своя собственная частота  $\omega_n = \varepsilon_n/\hbar$ , где  $\varepsilon_n$  — соответствующая собственная энергия. Поэтому частица  $m$ , чтобы передать энергию среде, должна "сама поискать" вонне резонансы на частотах  $\omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$ . Если такие резонансы найдены, то даже при очень слабом взаимодействии со средой, частица  $M$  может передать энергию среде. Однако процесс релаксации начинается не с этого. Если осциллятор ангармонический, то частоты  $\omega_{12}, \omega_{23}, \dots$  не совпадают между собой и поэтому во внешней среде они находят различные резонансы. Поэтому первое, что происходит — это сбой разности фаз между различными уровнями. Волновые функции разных уровней теряют взаимную когерентность, а это значит, что у частицы происходит коллапс волновой функции на один из уровней. Вероятность соответствующего коллапса равна квадрату амплитуды. В силу сохранения энергии аналогичный коллапс должен произойти и в той системе, которая приготовила частицу в состоянии суперпозиции нескольких уровней. Другими словами, коллапс функции данной частицы как бы переносится на систему, подготовившую частицу для последующего наблюдения.

После того, как частица "сядет" на определенный уровень, наступают процессы излучения квантов  $\hbar\omega_{12}$ ,  $\hbar\omega_{23}$  и т.д., т.е. частица "спускается" вниз по уровням. Наконец, на нижних уровнях происходит установление теплового равновесия: частица то излучает, то поглощает кванты, приходя в равновесие с тепловым излучением. Этот последний процесс также сопровождается квантовыми переходами, т.е. соответствующими коллапсами то на один, то на второй и т.д. уровни. В каждый данный момент одна квантовая частица может находиться только на одном уровне, если только во внешней среде не созданы специально когерентные связи у одних квантовых состояний излучения с другими. Переходы с излучением или с испусканием квантов поля — это и есть коллапсы волновой функции. Можно сказать, что понятие коллапсов неявно возникло вместе с понятием квантов: вместо термина квантовых переходов можно с тем же основанием пользоваться рассуждениями о коллапсах волновых функций.

Рассмотрим теперь несколько более сложный мысленный эксперимент. Допустим, что мы адиабатически медленно деформируем потенциал (рис. 16а) таким образом, что вместо одного минимума создаются два минимума потенциальной энергии (рис. 17а). Предположим, кроме того, что частица находится на самом нижнем энергетическом уровне.

Если говорить более точно, то в потенциале с двумя ямами и большим горбом между ними следует учитывать два нижних уровня. Один из них, более низкий, соответствует симметричной волновой функции, а второй — антисимметричной. Если мы создавали начальное состояние

очень аккуратно, т.е. путем адиабатической деформации нижнего состояния в исходной одиночной яме, то наша частица будет находиться в симметричном состоянии.

Попробуем теперь произвести с нашей частицей различные мысленные эксперименты. Прежде всего разнесем две ямы (рис. 17а) достаточно далеко друг от друга, как бы "запирая" волновую функцию

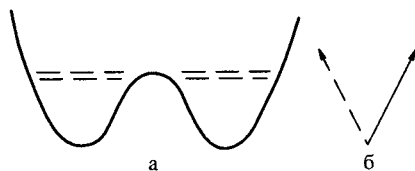


Рис. 17. Нижние энергетические уровни в двухъямном потенциале (а) составляют слабо расщепленный дуплет. Если слабое внешнее взаимодействие разрушает когерентность правой и левой частей, то волновая функция коллапсирует в одну из потенциальных ям. Соответствующие нарушения симметрии можно протектировать извне, что эквивалентно измерению: из двух возможных состояний (б) только одно окажется реальным.

в двух "ящичках". При этом энергии симметричной и антисимметричной функций окажутся практически одинаковыми. Соответственно, одинаковыми будут энергетические уровни в левой и правой ямах, причем волновые функции частицы в каждой из ям равны, соответственно, полусумме и полуразности симметричной и антисимметричной функций.

Начнем теперь "нагревать" частицу, приводя ее в контакт с внешним термостатом. При этом наряду с нижними уровнями в игру вступают более высокие уровни, и частица может переходить на них с вероятностью, определяемой распределением Больцмана. Но для нас более важен другой эффект. Тепловые шумы разрушают когерентную связь между правой и левой ямами. Частица при этом может существовать только в одном из "ящиков". Соответственно, в одном из ящиков волновая функция есть, а в другом ее нет. Происходит коллапс волновой функции, но пока что без коллапса вероятностей: вероятность находиться частице в одном из ящиков по-прежнему равна  $1/2$ . Ситуация здесь в точности подобна той, что мы рассматривали в самых начальных разделах книги. Мы имеем частицу в термостате, разделенном перегородкой. Можно попытаться узнать, в каком из "ящиков" находится частица. Для этого требуется провести соответствующее измерение, которое сопровождается необратимым процессом во внешнем мире. После измерения распределение вероятностей для частицы коллапсирует в состояние  $0, 1$ . При этом энтропия частицы убывает на один бит, а во внешнем мире должен протечь необратимый процесс с возрастанием энтропии не менее чем на один бит. Другими словами, мы имеем дело с типичным информационным процессом.

Но допустим, что мы такого измерения не проводим, а начнем снова понижать температуру до нуля. В конечном состоянии частица опять сядет на нижний уровень в одной из ям, но теперь можно точно утверждать, что один из ящиков опустошен и частица находится только в одном из ящиков. Другими словами, одно лишь слабое соприкосновение системы с внешним миром и соответствующее разрушение когерентности привело как бы к "спонтанному нарушению симметрии" — волновая функция частицы коллапсирует в один из ящиков. Мы можем снова попытаться измерить, в какой из ям находится частица, но соответствующее измерение уже не затрагивает волновой функции, а всего лишь коллапсирует распределение вероятностей.

Допустим теперь, что мы этого измерения не проводили. Тогда можно представить себе смешанный ансамбль из многих состояний, половина из которых имеет полусумму, а вторая половина —

полуразность симметричной и антисимметричной волновых функций. Другими словами, в половине состояний частица находится в левой яме, а в другой половине состояний — в правой яме. Начнем сближать ямы и уменьшать барьер между ними. Тогда каждое из состояний начнет совершать колебания, так что соответствующая волновая функция будет периодически переходить из одной ямы в другую. Частота соответствующих колебаний равна  $\Delta\varepsilon/\hbar$ , где  $\Delta\varepsilon$  — разность энергий симметричного и антисимметричного состояний. Если частота этих колебаний известна, то можно предсказать такой момент, когда волновая функция снова соберется в одну из ям. Если теперь произвести измерение наличия частицы в одной из ям, то мы автоматически совершим коллапс предыдущих вероятностей, т.е. узнаем, к какому подансамблю принадлежит данная частица.

А теперь вместо этого очень длинного сценария рассмотрим более простой. А именно, представим себе, что мы хотим измерить, т.е. узнать, в какой из ям (рис. 17а) находится частица вскоре после того, как такая яма была получена путем медленной деформации одиночной ямы (рис. 16а). Пусть прибор устроен таким образом, что после измерения волновая функция коллапсирует только в одну яму, т.е. из двух возможных состояний только одно остается реальным (рис. 17б). Такой прибор должен разрушить когерентность исходного состояния и породить смесь симметричной и антисимметричной функций. Это значит, что он должен передать энергию частице не менее  $\Delta\varepsilon/2$ . Но кроме того, вместе с коллапсом волновой функции (в одну из ям) прибор осуществляет коллапс вероятностей в данную конкретную яму. Это значит, что в приборе (или внешнем мире) должно произойти возрастание энтропии на величину, не меньшую одного бита, т.е.  $\ln 2$ .

Таким образом, с помощью нашего простого примера нам удалось разобраться в целом ряде вопросов. Прежде всего мы смогли отделить коллапсы волновых функций от коллапсов вероятностей. Как мы установили, одного лишь теплового движения достаточно для разрушения когерентности и коллапса волновой функции в одно из возможных состояний. Пока этот коллапс не наблюдается извне, лучше говорить о превращении чистого ансамбля в смешанный: мы имеем необратимый процесс с набором вероятностей в конечном состоянии, и наша частица является представителем этого ансамбля. Можно сказать, что коллапс — это флуктуация, и если мы не имеем специального интереса к флуктуации, то можно использовать усредненное статистическое описание с соответствующими вероятностями, т.е. матрицу плотности смешанного состояния.

Однако и сам коллапс — это интересное физическое явление, и его можно изучать при квантовом измерении. Квантовое измерение — это так организованный процесс, в котором и коллапс волновой функции, и коллапс вероятностей протекают одновременно. Мы имеем как бы единый информационный процесс. Согласно рис. 2 при измерении действительно происходит как коллапс волновой функции, так и коллапс вероятностей. Информация о квантовом объекте воспринимается, т.е. "записывается" в "персепторе"  $P$  с одновременным "выделением" значения  $U_i$  физической системы  $U$ . Все это оказывается возможным благодаря "питателю"  $F$ , который передает часть негэнтропии (информации) в "персептор", а часть энтропии  $W = I_s - I$  выбрасывает в виде "шлака" в окружающую среду. В самом же физическом объекте когерентность разрушается, и волновая функция коллапсирует только в одно из состояний. Таким образом, квантовое измерение — это сильно неравновесный процесс, который можно рассматривать как один из сценариев приближения к равновесию.

Рассмотрим еще один аспект модели на рис. 17а. Если разнести потенциальные ямы достаточно далеко друг от друга, то полученную систему можно рассматривать как ячейку памяти. Частица, помещенная в один из "ящичков", будет находиться там сколь угодно долго, сохраняя один бит информации. Этот бит информации можно заложить изначально, деформируя яму (рис. 16а) в потенциал (рис. 17а) с некоторой несимметричной добавкой так, чтобы частица спустилась на нижний уровень только в одну из ям. Эта несимметричная добавка и служит тем управляющим параметром, который изначально сохраняет один бит информации и затем вкладывает его в ячейку. Другой вариант создания несимметрии более "громоздок" — вторую яму (рис. 17а) можно было бы "сформировать" вдали от первой ямы (где находится частица), а затем приблизить ее пустой и создать симметричную ячейку на рис. 17а. Еще один вариант состоит в том, что можно наделать много ячеек типа рис. 17а, затем сколлапсировать в них волновые функции путем их "подогревания", а затем рассортировать их на "правые" и "левые" с помощью измерений. Далее, из таких ячеек можно конструировать текст. Но еще более завлекательной кажется возможность (если она сможет быть осуществлена) записывать текст непосредственно коллапсами волновых функций внутри ячеек.

Набор многих ячеек типа рис. 17а со сколлапсированными внутри них ячейками можно рассматривать как своего рода "квантовую память". Для считывания текста в такой памяти достаточно только узнать, в какой из ям находится волновая функция, и для этого совершенно не обязательно разрушать имеющееся квантовое состояние — нужно лишь иметь внешний "питатель" с необходимым запасом



классической негэнтропии и детектор, который "узнает", какая из ям заполнена.

Обсудим теперь вопрос о приближении к равновесию в системе многих частиц, а точнее, в газе — одной из простейших таких систем. Как мы видели выше, классическое рассмотрение движения атомов или молекул газа, естественно, приводит к молекулярному хаосу и к уравнению Больцмана. А процесс приближения к равновесию плотного газа в рамках уравнения Больцмана, естественно, переходит в описание динамики газа на базе уравнений газодинамики с диссипацией.

Но атомы газа — это не классические, а квантовые микрочастицы. Как следует строить более логичную картину процесса, мы уже установили в предыдущих разделах. Здесь мы подойдем к этому вопросу с точки зрения необратимой эволюции системы. Представим себе отдельный квантовый пакет некоторой наугад взятой частицы. В силу неразличимости частиц лучше говорить не о выделенной частице, а о волновом пакете, отвечающем одной частице. Такой волновой пакет при своем движении будет рассеиваться на других пакетах, и его форма будет становиться похожей на сложно изрезанное расширяющееся облако. Отдельные части такого облака быстро потеряют взаимную когерентность, так что частица неизбежно должна попасть в одну из его частей. Можно сказать, что любая начальная волновая функция такой частицы коллапсирует в более компактный волновой пакет.

К этому же выводу можно прийти с помощью следующих рассуждений. Пусть газ находится внутри замкнутого сосуда с линейными размерами, значительно большими длины свободного пробега атомов. Допустим далее, что газ вместе с сосудом находится в термостате в полном термодинамическом равновесии. А теперь проведем с этим газом некоторые мысленные эксперименты. Допустим, что в некоторый момент  $t = 0$  стенки сосуда становятся зеркально отражающими и, соответственно, теплоизолирующими. Пусть одновременно один из атомов газа заменяется на пробную частицу с той же массой, скоростью и сечением рассеяния, что и у изъятого атома. Такая замена очень мало меняет состояние газа: его тепловая энергия сохраняется, энтропия уменьшается на величину  $k \ln(V/\Delta V)$ , поскольку пробная частица не тождественна с атомами газа и занимает малую долю  $\Delta V$  от полного объема  $V$  ( $k$  — постоянная Больцмана). Далее, казалось бы, должна наступить необратимая релаксация газа. А именно, с точки зрения классической механики пробная частица должна диффундировать в пространстве, так что ее средняя функция распределения будет стремиться заполнить весь

объем сосуда. А в рамках квантовомеханического описания естественно ожидать, что волновая функция пробной частицы будет заполнять все больший и больший объем вследствие последовательных перерассеяний на атомах газа. При достаточно больших временах можно ожидать установления полного термодинамического равновесия.

Описанная картина кажется вполне правдоподобной, но в ней скрыт парадокс. Дело в том, что наша система является замкнутой, и поэтому она эволюционирует детерминированно: в классическом случае по законам обычной механики, а в квантовом — в соответствии с уравнением Шрёдингера.

Такая эволюция является полностью обратимой. Поэтому, если в некоторый момент времени  $t = t_0$  обратить скорости всех частиц у классической системы или заменить волновую функцию  $\psi$  на ее сопряженную  $\psi^*$  у квантовой системы, то эволюция пойдет в обратную сторону, и при  $t = -t_0$  система вернется в исходное состояние. В том числе, и пробная частица вернется в исходное состояние с соответствующим значением отрицательной энтропии, которая была у нее при  $t = 0$ .

Ясно, что такая картина является слишком идеализированной. Достаточно перейти к более реалистическому случаю обычного сосуда, находящегося в тепловом равновесии с термостатом, как обратимость исчезнет. Вероятность пробной частицы вернуться в прежнее состояние станет ничтожно малой, поскольку понизить энтропию системы не так-то просто (в естественных условиях теплового равновесия).

В классическом случае необратимость связана с сильной неустойчивостью системы, т.е. с разбеганием траекторий в фазовом пространстве. А в квантовом случае обращение по времени превращает рассеянные расходящиеся волны в сходящиеся волны. Ясно, что малое внешнее возмущение легко разрушает когерентность сходящихся волн. Поэтому в газе, контактирующем с термостатом, эволюция функции  $\psi(-t)$  должна быть сходна с эволюцией  $\psi(t)$ : и в том, и в другом случае должны присутствовать рассеянные волны.

Продолжим мысленные эксперименты с пробной частицей и газом, находящимся в тепловом равновесии с термостатом. Допустим, что в некоторый момент времени  $t = t_0$  сосуд с газом мгновенно делится пополам непроницаемой перегородкой. Ясно, что пробная частица окажется только в одной из половин и будет находиться там все последующее время необратимой эволюции системы. В этих условиях волновую функцию пробной частицы можно считать равной нулю в пустой половине, по крайней мере, после нескольких времен столкно-

вений вслед за  $t = t_0$ , когда возврата к прежнему состоянию заведомо не может быть.

Вместо одной перегородки можно ввести много перегородок и соответственно разбить сосуд с газом на много объемчиков, каждый с линейным размером порядка нескольких длин свободного пробега. Все дальние корреляции опять забываются после нескольких столкновений, и пробная частица вместе со своей волновой функцией окажется только в одном из объемчиков.

Достаточно очевидно, что волновая функция пробной частицы должна быть локализована в этом объемчике и в том случае, когда никаких перегородок не вводится. В самом деле, за время порядка нескольких времен столкновений частица не успевает сместиться на расстояние, больше нескольких длин пробега. Другими словами, сами столкновения выполняют роль "перегородок", отделяющих друг от друга малые объемы газа (в стационарном состоянии газа).

Итак, в любой момент времени волновую функцию пробной частицы можно считать локализованной внутри малого объема с поперечным размером масштаба нескольких длин пробега. Давайте теперь мысленно возвратимся в прошлое, стартуя с  $t = t_0$ . При движении в прошлое все расходящиеся волны превращаются в сходящиеся. Это значит, что при увеличении  $t_0 - t$  волновая функция пробной частицы должна постепенно сжиматься в малый комочек, предельные размеры которого определяются конкуренцией между квазиоптической фокусировкой лучей и дифракционным расплыванием волнового пакета (см. рис. 15). Поэтому размеры такого волнового пакета значительно меньше длины свободного пробега. Соответственно, эволюцию волновой функции пробной частицы в прошлом можно описывать в терминах случайного блуждания компактного волнового пакета, испытывающего последовательные рассеяния на атомах газа. Сходным образом должны вести себя и волновые функции атомов газа.

Коллапсы волновых функций внутри газа не отличаются от тепловых флуктуаций — они не измеримы извне и не сопровождаются коллапсами наблюдаемых вероятностей. При этом внутри небольшого макроскопического объема процесс релаксации происходит практически так же, как у классических частиц. А именно, локально функция распределения максвеллизуется, и у газа появляются макроскопические параметры порядка — температура, плотность, скорость. Макроскопические "газовые" частицы из многих молекул имеют очень малую длину волны де Бройля, так что их волновые функции можно считать сколлапсированными в квазиклассические функции. Поэтому для газа в целом могут быть использо-

ваны уравнения классической газодинамики со всеми вытекающими последствиями.

Наличие коллапсов у волновых функций атомов газа позволяет рассматривать газ в качестве измерительного прибора.

Любое квантовое измерение включает в себя три этапа: спектральное разложение волновой функции, коллапс волновой функции и регистрацию события (см., например, [22]). Первый этап является чисто подготовительным: он еще не производит измерения, а только подготавливает спектральное представление волновой функции для последующего измерения. Наиболее необычным и деликатным является второй этап, когда волновая функция в результате взаимодействия с макротелом проектируется на одно из возможных состояний по закону случайных событий. Именно здесь и заключена вся специфика квантового измерения. Что касается третьего этапа, то это всего лишь архивная запись результата коллапса.

Возможность описания коллапсов волновых функций атомов газа позволяет рассмотреть наиболее интригующий этап квантового измерения — коллапс волновой функции. Для этого достаточно использовать разреженный газ в качестве измерительного устройства, т.е. системы, осуществляющей коллапс волновой функции.

Рассмотрим вертикально расположенный слой газа толщиной  $L \gg \lambda$ . Направим ось  $x$  прямоугольной системы координат  $(x, y, z)$  по нормали к этому слою. Пусть теперь на слой газа вдоль оси  $x$  падает волновая функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$  частицы с той же массой  $m$ , что и у атомов газа. Пусть скорость этой частицы равна  $v_0$ , а сечение рассеяния на атомах газа равно  $\sigma_0$ , так что длина пробега равна  $\lambda_0 = 1/n\sigma_0$ . Мы предположим, что стенки, ограничивающие газ, прозрачны для падающей частицы.

Волновая функция падающей частицы рассеивается на атомах газа, так что нерассеянная часть волны убывает с  $x$  как  $\exp(-x/2\lambda_0)$ , а квадрат волновой функции как  $\exp(-x/\lambda_0)$  (мы для простоты считаем, что  $v_0 \gg v_T$ ). На длине порядка  $\lambda_0$  падающая частица испытывает множество рассеяний на атомах газа. Соответственно, образуется множество рассеянных волн. Каждой такой рассеянной волне соответствует второй партнер взаимодействия — атом, на котором произошло рассеяние. По этой причине квадрат модуля волновой функции рассеянных волн нормирован быть не может.

За время  $\tau = \lambda/v_T$  атомы газа успевают испытывать столкновения, сопровождающиеся соответствующими коллапсами волновых функций. Только один из атомов газа сможет испытать совместный коллапс с волновой функцией падающей частицы, а все остальные атомы испытают коллапсы без всякого участия падающей частицы.

При совместном коллапсе вся остальная неколлапсированная часть падающей волновой функции мгновенно уничтожается. Совместная волновая функция пробной частицы и атомов вновь факторизуется, и к волновой функции атома снова можно применить условие нормировки.

Допустим теперь, что волновая функция падающей частицы зависит от одной из поперечных координат, скажем, от  $y$ :  $\psi = \psi(y)$ . Так как до взаимодействия с атомами газа волновая функция  $\psi(y)$  является общим множителем у полной волновой функции всей системы, то вероятность совместного коллапса волновой функции и одного из атомов газа будет пропорциональна  $|\psi(y)|^2$  просто в силу того, что вероятности коллапса волновых функций атомов газа пропорциональны квадратам модулей их волновых функций. Как мы видим, падающая частица "измеряется" с вероятностью, пропорциональной  $|\psi(y)|^2$ .

На данном примере хорошо видно, что коллапс волновой функции является единым процессом для общей многочастичной волновой функции: он относится не только к волновой функции "измеряемой" частицы, но и к волновым функциям атомов газа.

Если  $L \gg \lambda_0$ , то волновая функция падающей частицы полностью "застревает" в слое газа, т.е. она наверняка "измеряется" этим слоем. После коллапса падающей волновой функции образуется достаточно компактный (с размером  $\sim \sqrt{\lambda\lambda_B}$ ) волновой пакет падающей частицы. Вероятность образования такого пакета распределена как  $|\psi(y)|^2$  в поперечном направлении и как  $\exp(-x/\lambda_0)$  по глубине. После первого "измерительного" коллапса волновой пакет будет диффундировать в газе, испытывая цепочку последовательных столкновений с атомами газа в виде броуновского движения. Если ширина падающего на газовый слой волнового пакета значительно больше ширины  $\sqrt{\lambda\lambda_B}$  пакета после коллапса, то коллапс сопровождается сильным уменьшением размеров волнового пакета. В этом случае можно считать, что "маленькие пятнышки" коллапсированных пакетов приближенно ортогональны друг другу. Другими словами, такие коллапсы похожи на результат действия проекционного оператора фон Неймана на исходный волновой пакет.

Рассмотрим теперь несколько более сложный вариант мысленного эксперимента. Допустим, что в рассматриваемом нами слое газа вырезаны две щели, а на достаточно далеком расстоянии  $L_0$  установлен второй слой газа, играющий роль экрана. Ясно, что те волны, которые проходят через щели, создают интерференционную картину на экране, т.е. во втором слое газа. Коллапсы на экране опять будут давать "пятнышки" малых размеров порядка  $\sqrt{\lambda\lambda_B}$ . Вероятность их

появления на втором слое газа пропорциональна  $|\psi(y)|^2$ . Повторяя "измерения" много раз, можно "прорисовать" интенсивность  $|\psi(y)|^2$  во втором слое газа. Число таких пятнышек будет равно числу частиц, падающих на первый слой газа, умноженному на вероятность прохождения через щели. Другими словами, через щели пройдут только те частицы, которые не "измеряются" первым слоем газа. А для частиц, коллапсирующих в первом слое газа, прошедшие через щели волны соответствуют так называемым "пустым волнам" — во втором слое газа они, естественно, сколлапсировать уже не смогут.

На первый взгляд кажется, что коллапсы в первом и втором слоях газа происходят совершенно независимо: второй слой регистрирует только те частицы, которые прошли через щели в первом слое. Но на самом деле ситуация несколько сложнее. Обозначим через  $\tau_0$  величину  $\lambda_0/v_0$ , где  $v_0$  — скорость падающей частицы, а  $\lambda_0$  — ее пробег в газе. Ясно, что падающая частица может сколлапсировать за время, не меньшее  $\tau_0$  и  $\tau$ . Если  $\tau_0 \ll \tau$ , то за время коллапса атома газа налетающая частица пролетает расстояние  $\lambda_0\tau/\tau_0$ . Если это расстояние больше  $L_0$ , то падающая частица успевает создать рассеянные волны как в первом, так и во втором слоях газа. Это значит, что коллапс происходит либо в первом, либо во втором слое, и одновременно происходит уничтожение всех волн в том слое, где коллапса нет. Но это означает, что волновая функция падающей частицы осуществляет корреляцию коллапсов в двух, казалось бы, независимых слоях газа. Отсюда видно, что коллапсы волновых функций представляют собой коллективный нелокальный эффект, затрагивающий полную волновую функцию всей системы, т.е. частицы и двух слоев газа.

Еще лучше эта коллективность видна, если вместо одной частицы воспользоваться коррелированной парой частиц парадокса Эйнштейна, Подольского, Розена [8]. Допустим, что мы имеем две частицы, разлетающиеся из общего центра с суммарным импульсом, равным нулю. Пусть справа и слева от точки разлета частиц установлены два слоя газа на равных расстояниях  $L_0$  от точки вылета частиц. Ясно, что если в одном из слоев газа произойдет коллапс первой частицы, то во втором слое сколлапсирует волновая функция второй частицы, причем точно в симметричной точке (с точностью до  $\sqrt{\lambda\lambda_B}$ ). Если оба слоя газа находятся на равных расстояниях от точки вылета скоррелированных частиц, то нельзя сказать, в каком из слоев коллапс происходит раньше. Это значит, что само наличие пары скоррелированных частиц автоматически приводит к коррелированным коллапсам в далеко разнесенных слоях газа. Коллапс опять относится ко всей системе — ЭПР-паре частиц и двум слоям газа.

Необратимость в каждом из слоев оказывается связанной с необратимым взаимодействием с окружением. Но это взаимодействие устроено таким образом, что оно сохраняет квантовые корреляции, существовавшие перед коллапсом. Можно сказать, что на коллапсы наложена достаточно жесткая связь (constraint), так что вероятности коллапсов следуют закону  $|\psi|^2$ , а волновая функция  $\psi$  перед коллапсом подчиняется уравнению Шрёдингера.

Корреляция коллапсов при "измерении" устанавливается мгновенно, т.е. сверхсветовым образом. Необходимость именно сверхсветовых связей между коллапсами в разных областях пространства начала обсуждаться Стаппом [57] и усиленно дискутируется в настоящее время.

### 36. Квантовый эффект Зенона

Коллапсы волновых функций, безусловно, хотелось бы пронаблюдать в прямом эксперименте. Одно время казалось, что лучше всего для этой цели подходит квантовый эффект Зенона. Этот термин был введен в работе Мисра и Судершана [58], которые, опираясь на теорию квантовых измерений, показали, что распад неустойчивой квантовомеханической системы можно запретить, если последовательно производить очень частые ее измерения. Название эффекта, или парадокса, было предложено ими по аналогии с известной апорией греческого философа Зенона, согласно которой испущенная из лука стрела не может лететь, если ее наблюдать в каждый момент времени.

Суть квантового эффекта Зенона проще всего пояснить с помощью рис. 17а. Допустим, что при  $t = 0$  волновая функция частицы отлична от нуля только в левой яме. Это значит, что начальная волновая функция равна полусумме симметричного и антисимметричного состояний. В последующие времена амплитуда волновой функции в левой яме будет осциллировать по закону  $\cos \omega t$ , а в правой яме — по закону  $\sin \omega t$ , где  $\omega = \Delta\varepsilon/\hbar$ ,  $\Delta\varepsilon$  — разность энергий симметричного и антисимметричного состояний. Допустим теперь, что в момент времени  $t = \tau \ll 1/\omega$  производится измерение частицы в правой яме. Вероятность найти там частицу равна  $\omega^2 \tau^2 \ll 1$ . Вероятность того, что частица останется в левой яме, равна  $p_1 = 1 - \omega^2 \tau^2 \cong \exp(-\omega^2 \tau^2)$ . Допустим теперь, что мы производим  $N$  последовательных измерений наличия частицы в правой яме в течение времени  $t_N = N\tau$ . Ясно, что вероятность того, что частица после этого останется в левой яме, равна  $p_N = \exp(-\omega^2 \tau^2 N) = \exp(-\omega^2 t_N^2 / N)$ . Если измерения производить очень часто, то при  $t_N = N\tau = \text{const}$  можно перейти к пределу  $N \rightarrow \infty$ . Тогда вероятность того, что частица останется в левой яме

будет равна единице: переход в правую яму оказывается запрещенным. Это и есть квантовый эффект Зенона.

Длительное время этот эффект выглядел как своего рода умогрозный парадокс. Но спустя много лет после работы [58] Итано, Хейнцен, Боллингер и Винеланд [59] провели эксперименты по схеме Кука [60] с целью прямого наблюдения эффекта Зенона. Мы кратко опишем их эксперимент. В экспериментах использовались три уровня ионов бериллия. Пусть частоты этих уровней равны  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Уровень 1 соответствует стабильному состоянию, а уровни 2, 3 — возбужденным состояниям. Частота  $\omega_3 - \omega_1$ , лежит в оптической области, а разность частот  $\omega_2 - \omega_1$  настолько мала, что она попадает в радиодиапазон. Переходы типа  $2 \leftrightarrow 3$  оказываются запрещенными. В эксперименте имелась возможность прикладывать импульсы ВЧ-поля на резонансной частоте  $\omega_2 - \omega_1$ . Каждый такой импульс может создавать когерентную суперпозицию состояний 1 и 2, которая осциллирует с частотой Раби  $\Omega$ . Если высокочастотный импульс прикладывается в течение времени  $T = \pi/\Omega$ , то все ионы, находившиеся в основном состоянии 1, перейдут в состояние 2. Такой переход сходен с переходом волновой функции (рис. 17а) из левой ямы в правую за время  $\pi\hbar/\Delta\varepsilon$ . Чтобы имитировать процесс измерений, авторы работы [59] прикладывали очень короткие импульсы на резонансной оптической частоте  $\omega_3 - \omega_1$ . Поскольку возбужденный уровень  $\omega_3$  быстро распадается, то короткий оптический импульс интерпретировался Итано и др. [59] как "измерение" уровня 1. За время  $T$  прикладывалось  $n \gg 1$  коротких оптических импульсов. Если каждый оптический импульс приводит к редукции волновой функции, то вероятность  $p_2$  перехода  $1 \leftrightarrow 2$  под действием ВЧ-поля будет сильно уменьшена. Это значит, что возникает эффект Зенона:  $p_2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Однако дальнейшие обсуждения показали, что интерпретация результата эксперимента [59], как следствия коллапсов волновой функции, далеко не однозначна [61–69]. В частности, в работе Петроски, Тасаки, Пригожина [62] было показано, что результаты экспериментов [59] могут быть объяснены обычной квантовой механикой без привлечения представлений о промежуточных коллапсах волновых функций.

Особенно простая модель для выяснения роли промежуточных коллапсов была рассмотрена Намики с соавторами [65, 68, 69]. А именно, они предложили мысленный эксперимент с пучком поляризованных нейтронов. Пусть такой пучок распространяется вдоль оси  $x$ . На пути пучка располагается много идентичных ячеек, каждая из которых состоит из магнитной катушки, создающей поле вдоль оси



х, и поворотного магнита. Пусть на входе в систему спин каждого из нейтронов направлен вверх. После прохождения магнитной катушки образуется суперпозиция состояний со спином, направленным вверх, и спином, направленным вниз. Нейтроны со спином, направленным вниз, могут отклоняться поворотным магнитом и поглощаться в детекторе. Таким образом, каждая из ячеек создает примесь состояния со спином, направленным вниз, а затем его измеряет. Возникает картина, в точности аналогичная рис. 17а при наличии периодически повторяющихся измерений в правой потенциальной яме. Ясно, что при этом возникает квантовый эффект Зенона. Его можно описать [69] с помощью матрицы плотности для спинов пучка нейтронов и детектирующих ячеек. При этом, как и следовало ожидать, получается матрица плотности с нулевыми недиагональными элементами.

Но с этой же схемой можно провести другой мысленный эксперимент [69]. А именно, допустим, что все промежуточные детекторы убраны, а сохранен только выходной детектор  $D_0$ , который измеряет состояние со спином, направленным вверх. Тогда для проходящего пучка и отклоненных, но не измеряемых нейтронов со спином, направленным вниз, можно снова написать матрицу плотности. На этот раз у нее имеются не нулевые недиагональные элементы. Но диагональные элементы оказываются в точности такими же, как в первом эксперименте. Если число ячеек с магнитами стремиться к бесконечности, то снова будет иметь место эффект Зенона: вероятность регистрации нейтронов окончательным детектором  $D_0$  в состоянии со спином, направленным вверх, стремится к единице, а все остальные матричные элементы матрицы плотности как диагональные, так и недиагональные стремятся к нулю. Таким образом, эффект Зенона не зависит от промежуточных коллапсов волновой функции.

Аналогичный мысленный эксперимент можно провести по схеме рис. 17а. А именно, вместо измерения волновой функции частицы в правой яме, можно через каждый интервал времени  $\Delta t = \tau$  выпускать частицу из правой ямы так, чтобы она вылетала в направлении  $x \rightarrow \infty$ . В таком варианте за пределами правой ямы мы получим  $N$  волновых пакетов, которые можно рассматривать как набор ортогональных состояний (если пакеты не перекрываются между собой). Эти пакеты можно не измерять, и тогда матрица плотности будет иметь ненулевые матричные элементы. А для волновой функции в левой яме совершенно безразлично, уничтожается ли волновая функция в правой яме измерением, либо просто испусканием из ямы в  $x \rightarrow \infty$ . При  $N \rightarrow \infty$  опять формально возникает эффект Зенона, если  $N\tau = \text{const}$ .

В приведенных здесь рассуждениях переход  $N \rightarrow \infty$  предполагает  $\tau \rightarrow 0$ . Разумеется, реальные физические измерения не могут быть проведены мгновенно: на величину  $\tau$  всегда должно быть наложено некоторое ограничение снизу [67, 70–72]. Однако не этот вопрос нас интересует в первую очередь. Главным является вопрос о том, действительно ли промежуточные коллапсы необходимы для квантового эффекта Зенона? Как видно из приведенных выше рассуждений и цитированной литературы, промежуточные коллапсы не обязательны. Если в схеме рис. 17а периодически открывать заслонку и выпускать частицу из правой ямы наружу, то волновая функция в этой яме периодически будет сбрасываться до нуля даже в отсутствие измерений. Открывание заслонки и испускание волнового пакета исключает последующую интерференцию остатка волновой функции в правой яме с вновь приходящим возмущением волновой функции из левой ямы. Главным является разрушение интерференции, и это разрушение может быть вполне регулярным и не связанным с уничтожением той или иной компоненты волновой функции при измерении. В последующих разделах мы познакомимся с процессами коллапсирования в системах с многими частицами. Там эти коллапсы играют принципиальную роль.

### 37. Броуновское движение квантовой частицы

В разделе 30 мы познакомились с возможностью описания стохастического движения частицы с помощью случайной волновой функции. Здесь мы рассмотрим применение этого метода к броуновской частице.

Броуновское движение квантовой частицы рассматривалось многими авторами (см., например, [73–76] и цитируемую там литературу). Соответствующий математический аппарат достаточно сложен, а по своему духу он ближе к операторному, т.е. к представлению Гейзенберга. В рамках такого подхода трудно охватить такие постановки экспериментов, когда начальное состояние квантовой броуновской частицы описывается заданным протяженной в пространстве волновой функцией. Поэтому нахождение более простого и наглядного способа описания броуновского движения квантовой частицы, безусловно, представляет интерес.

Для описания броуновского движения квантовой частицы можно составить уравнение Ланжевена для оператора координаты (см., например, [76]). Но более привлекательным и наглядным кажется волновое описание. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли составить уравнение типа Ланжевена непосредственно для волновой функции

тяжелой частицы  $\Psi(\mathbf{R}, t)$  с координатами  $\mathbf{R} = \{X, Y, Z\}$ . Другими словами, нельзя ли ввести в рассмотрение случайную волновую функцию, для которой можно было бы составить некоторое феноменологическое уравнение, аналогичное уравнению Ланжевена (79) для случайной скорости классической частицы.

Естественно предположить, что такое уравнение является некоторым обобщением уравнения Шрёдингера. В соответствии с этим предположим, что волновая функция тяжелой частицы  $\Psi$  удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 \Psi + K\Psi, \quad (172)$$

где  $K$  — некоторый случайный оператор, описывающий случайные толчки со стороны атомов газа.

Постараемся теперь понять, как устроен оператор  $K$ . Начнем с качественного рассмотрения. Допустим, что рассматриваемая нами частица испытала один единственный толчок с переданным импульсом  $\hbar\mathbf{q}$ . Результат такого толчка можно учесть мгновенным умножением волновой функции  $\Psi$  на множитель вида  $\exp(i\mathbf{q}\mathbf{R})$ . Очевидно, что толчок от одной из молекул газа не может иметь место в широкой области пространства, поскольку движение молекул газа декогерентно, т.е. сильно хаотизировано. Чтобы тяжелая частица могла воспринять этот импульс как единое целое, волновую функцию тяжелой частицы следует уничтожить за пределами той области, где этот импульс был передан. Стало быть, оператор  $K$  для многих толчков должен иметь слагаемые вида

$$i\hbar \sum_N \delta(t - t_N) \Phi_N \exp(i\mathbf{q}_N \mathbf{R}). \quad (173)$$

Здесь  $t_N$  — момент  $N$ -го толчка,  $\hbar\mathbf{q}_N$  — импульс, передаваемый толчком номера  $N$ , а  $\Phi_N$  — форм-фактор, который описывает коллапс волновой функции вблизи некоторой случайной точки  $\mathbf{R}_N$ . Положения  $\mathbf{R}_N$  с различными номерами  $N$  должны быть коррелированы между собой, а распределение толчков по времени можно считать пуассоновским.

Пусть  $\tau$  есть среднее время между толчками. Вероятность  $p_N$  того, что за время  $t - t_N$  после толчка с номером  $N$  не произойдет последующего толчка, равна  $p_N = \exp[-(t - t_N)/\tau]$ . А вероятность того, что следующий за  $t_N$  толчок произойдет в интервале  $(t, t + \Delta t)$  равна  $p_N \cdot \Delta t/\tau$ .

С точки зрения молекул газа появление фактора  $p_N$  естественнее всего приписать убыванию амплитуды волновой функции тяжелой

частицы по закону  $\exp[-(t - t_N)/2\tau]$ . Поэтому случайный оператор  $K$  мы представим в виде

$$K = -\frac{i\hbar}{2\tau} + i\hbar \sum_N \delta(t - t_N) \Phi_N \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R}). \quad (174)$$

Мы пришли к уравнению (172), напоминающему уравнение Ланжевена (79). Оператор (174) является аналогом случайной силы  $F$ . Первое слагаемое в (174) описывает монотонное убывание волновой функции со временем: это аналог силы трения в классическом уравнении Ланжевена. А второе слагаемое в (174) описывает случайные точки со стороны молекул газа. Такие толчки как бы перебрасывают частицу (вместе с молекулами газа) из одного гильбертова пространства в другое, и поэтому данный подход напоминает теорию Мачида, Намики [77, 78] с использованием много-гильбертовых пространств, но не совпадает с этой теорией (поскольку он предполагает наличие коллапсов в индивидуальных событиях). Затухание волновой функции, описываемое первым слагаемым в (174), явно учитывает исчезновение когерентности. Оно сходно с феноменологически вводимым поглощением волновой функции нейтрона в оптической модели ядра.

Чтобы найти форм-фактор  $\Phi_N$ , нужно знать, как устроены волновые функции молекул газа. Как было показано выше, волновую функцию атома газа можно описать как волновой пакет, движущийся вдоль прямых отрезков между последовательными случайными столкновениями с другими атомами. При каждом таком рассеянии происходит дополнительное "поджатие" волнового пакета. Зная форму волновых пакетов легких частиц, можно попытаться найти форм-фактор  $\Phi_N$  в соотношении (174). При этом случай тяжелой частицы оказывается более простым в рассмотрении, поскольку траектория такой частицы изменяется очень медленно под действием ударов легких частиц.

Пусть тяжелая частица с массой  $M$  находится в газе легких атомов с массой  $m \ll M$ . Размеры тяжелой частицы считаем значительно меньшими, чем длина свободного пробега легких атомов. Координаты тяжелой частицы обозначим через  $X, Y, Z$  и будем считать, что тяжелая частица находится вблизи начала координат. Начнем с нулевого приближения по малому параметру  $m/M$ , допуская, что тяжелая частица остается неподвижной в течение некоторого времени.

Рассмотрим одну из легких частиц. Вследствие взаимодействия с тяжелой частицей легкая частица испытывает рассеяние. Пусть волновая функция налетающей частицы описывается волновым пакетом, близким к плоской волне вида  $\psi_i = \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}_i \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k}_i$  — началь-

ный волновой вектор (нормировку волновых функций мы пока не учитываем). Тогда в предположении сферически симметричного рассеяния (S-волны) волновую функцию рассеянной волны можно представить в виде

$$\psi_f = \frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \exp\{-i\omega t + i\mathbf{k}_f(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + i\varphi\}. \quad (175)$$

Здесь  $a$  — амплитуда рассеянной волны,  $\varphi$  — фаза, а волновой вектор упруго рассеянной волны можно считать равным  $\mathbf{k}_f = k(\mathbf{r} - \mathbf{R})|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^{-1}$ , где  $k = |\mathbf{k}_f|$ . В точке рассеяния,  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ , фаза рассеянной волны должна совпадать с фазой налетающей волны, т.е.  $\varphi = \mathbf{k}_i \mathbf{R}$ .

Переходя к учету всех частиц газа, сформулируем гипотезу молекулярного хаоса. Во-первых, как и в классическом случае, будем считать, что перед рассеянием тяжелая и легкая частицы не коррелированы между собой. А во-вторых, допустим, что после взаимодействия волновая функция рассеянной частицы испытывает эффект декогерентности из-за рассеяний на других атомах газа (температуру газа предполагаем достаточно высокой). А именно, учтем, что вследствие рассеяния на других атомах волновая функция данного атома становится структурно все более сложной. В конце концов она распадается на некогерентные пакеты, и мы предположим, что данная частица попадает только в один из таких пакетов: происходит коллапс волновой функции. Другими словами, необратимое разрушение когерентности волновой функции условимся описывать в виде совокупности случайных ее коллапсов.

Рассмотрим теперь, что происходит с волновой функцией тяжелой частицы. Допустим, что коллапс рассеянной волны легкой частицы произошел на расстоянии  $L$  от начала координат, вблизи которого располагается тяжелая частица. Направим ось  $X$  вдоль этого направления. При  $L \gg R$  волновую функцию рассеянной частицы можно приближенно представить в виде

$$\psi_f = \frac{a}{L} \exp\left[-i\omega t + i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)\mathbf{R} + ikx + \frac{ik(y - Y)^2 + (z - Z)^2}{2L}\right]. \quad (176)$$

Мы учли здесь, что  $kX = \mathbf{k}_f \mathbf{R}$ .

Пусть в результате декогерентности из функции (176) выделяется (коллапсирует) локализованный по  $y, z$  волновой пакет вида  $\psi_p = \exp\{-i\omega t + ikx - (y^2 + z^2)/2b^2\}$ , где  $b$  — ширина локализации пакета. "Спроектируем" рассеянную волну на сколлапсированное состояние  $\psi_p$ . Для этого умножим (176) на  $\psi_p^*$  и усредним результат

по  $y, z$ . Эта процедура приводит к выражению

$$\Phi = \langle \psi_p^* | \psi_f \rangle = \frac{a}{L} \exp \left[ -(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \mathbf{R} - \frac{k^2 b^2 (Y^2 + Z^2)}{2(L^2 + k^2 b^4)} \left( 1 - \frac{iL}{kb^2} \right) \right]. \quad (177)$$

Но ведь суммарная волновая функция тяжелой и легкой частицы выглядит как  $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ . Поэтому коллапс по  $y, z$ , автоматически приводит к "коллапсированию" волновой функции тяжелой и легкой частицы с форм-фактором (177). Мы имеем как бы пару коррелированных частиц мысленного эксперимента Эйнштейна – Подольского – Розена. Можно сказать, что в результате коллапса рассеянной частицы волновая функция тяжелой частицы (в данном подансамбле) сжимается вдоль направлений  $Y, Z$  с форм-фактором (177).

Естественно считать, что длина  $L$ , на которой происходит коллапс легкой частицы, имеет характерный размер длины свободного пробега  $\lambda$  легкой частицы в газе легких атомов. Что касается ширины локализации  $b$ , то она оказывается порядка  $\sqrt{\lambda_b \lambda}$ , где  $\lambda_b$  — средняя длина волны де Бройля атомов газа. Так что формально  $b^2 k \sim \lambda$ . Но чтобы не усложнять последующих формул, положим в (177)  $L \rightarrow 0$ , допуская тем самым несколько более широкие "затравочные" коллапсы.

Форм-фактор (177) можно дополнительно упростить, принимая во внимание следующее обстоятельство. Ось  $X$  была выбрана нами случайно: в общем случае локализация волновой функции легкой частицы может происходить по любому из направлений. Поэтому в среднем, для любого из коллапсов, величину  $Y^2 + Z^2$  следует заменить на  $(2/3)R^2$ . Таким образом, получаем приближенно:

$$\Phi = \exp \left[ -i(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \mathbf{R} - \frac{\mathbf{R}^2}{3b^2} \right]. \quad (178)$$

В выражении (178) вектор  $\mathbf{R} = \{X, Y, Z\}$  представляет собой текущий радиус-вектор тяжелой частицы в той системе координат, где коллапс происходит вблизи  $R = 0$ .

Первый член под экспонентой выражения (178) описывает просто передачу импульса: легкая частица изменяет свой импульс на величину  $\hbar \mathbf{q} = \hbar(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)$ , а тяжелая частица испытывает "отдачу", равную  $-\hbar \mathbf{q}$ . Второй член в экспоненте (178) отвечает фактору  $\Phi_N$  в соотношении (174) и показывает, что коллапс волновой функции легкой частицы сопровождается аналогичным коллапсом волновой функции тяжелой частицы. Таким образом, "молекулярный хаос" в квантовом случае не только приводит к случайным толчкам со стороны ударяющих частиц,

но и обеспечивает коллапсирование волновой функции тяжелой частицы, придавая ей черты классического поведения.

Первый же коллапс волновой функции рассеянной легкой частицы приводит к локализации волновой функции тяжелой частицы с фактором (178), т.е. в размерах порядка  $b$ . Последующие коллапсы рассеянных легких частиц могут приводить к дополнительной локализации волновой функции тяжелой частицы. Как это происходит, мы выясним несколько позже. А сейчас рассмотрим вопрос о том, как следует описывать движение квантовой частицы в рамках очень неточных наблюдений, когда разрешающая способность приборов не достаточна для того, чтобы "заглянуть внутрь" волнового пакета. Естественно допустить, что такое описание должно быть близким к классическому.

Итак, пусть масштабы броуновского движения частицы существенно превышают размеры локализации ее волнового пакета. Тогда движение пакета можно описывать с помощью координат "центра масс" пакета,  $\mathbf{R}_0 = \{X_0, Y_0, Z_0\}$  и средней скорости  $\mathbf{V}_0$ . Они определяются с помощью соотношений:

$$\mathbf{R}_0 = \int \Psi^*(\mathbf{R}) \mathbf{R} \Psi(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R}; \quad (179)$$

$$\mathbf{V}_0 = -i \frac{\hbar}{M} \int \Psi^*(\mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \Psi(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R}, \quad (180)$$

где  $\Psi(\mathbf{R})$  — волновая функция тяжелой частицы.

Случайные толчки со стороны легких частиц приводят к тому, что  $\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0$  становятся случайными функциями времени, требующими статистического описания. В приближении, близком к классическому, эффект от толчков можно описать с помощью уравнений

$$M \frac{d\mathbf{V}_0}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{V}_0, \quad (181)$$

со случайной силой  $\mathbf{F}$ .

Таким образом, мы приходим к классическому уравнению Ланжевена (79). Квантовые свойства такой частицы описываются недиагональными элементами матрицы плотности

$$\rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t) = \langle \Psi^*(\mathbf{R}, t) \Psi(\mathbf{R}', t) \rangle. \quad (182)$$

Здесь  $\Psi$  — волновая функция, а угловые скобки означают усреднение по статистическому ансамблю.

Оказывается, что для описания статистических свойств почти свободной квантовой частицы удобнее пользоваться не обычной

матрицей плотности, а несколько видоизмененным ее представлением.

Рассмотрим уравнение Шрёдингера для волновой функции  $\Psi(\mathbf{R}, t)$  свободной тяжелой частицы:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 \Psi. \quad (183)$$

Допустим, что волновая функция близка к плоской волне, так что  $\Psi = A(\mathbf{R}, t) \exp\{-i\Omega t + i\mathbf{K}\mathbf{R}\}$ , где  $\mathbf{K}$  — волновой вектор, а  $\Omega = \hbar K^2/2M$  — частота. Функция  $A(\mathbf{R}, t)$  представляет собой огибающую, которую можно считать медленно зависящей от  $\mathbf{R}$  и  $t$ . После подстановки выражения для  $\Psi$  в уравнение (183) получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla_{\mathbf{R}} A = \frac{i\hbar}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 A, \quad (184)$$

где  $\mathbf{V} = \hbar\mathbf{K}/M$ .

При  $\hbar \rightarrow 0$  получаем уравнение для свободного переноса амплитуды  $A$  со скоростью  $\mathbf{V}$ . Если мы имеем суперпозицию волновых пакетов с различными волновыми векторами, то каждому значению  $\mathbf{K}$  можно сопоставить свою амплитуду, так что амплитуду  $A$  можно считать функцией вида  $A(\mathbf{R}, \mathbf{V}, t)$ . Уравнение (184) относится к любой из этих амплитуд.

Составим матрицу  $P_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{V}, \mathbf{V}', t)$  вида

$$P_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{V}, \mathbf{V}', t) = \langle A^*(\mathbf{R}, \mathbf{V}, t) A(\mathbf{R}', \mathbf{V}', t) \rangle. \quad (185)$$

С помощью уравнения (184) получаем

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla_{\mathbf{R}} + \mathbf{V}'\nabla_{\mathbf{R}'})P_0 = -\frac{i\hbar}{2M} (\nabla_{\mathbf{R}}^2 - \nabla_{\mathbf{R}'}^2)P_0. \quad (186)$$

Введем в рассмотрение новые переменные:

$$\mathbf{R}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{R} + \mathbf{R}'); \quad \mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{V} + \mathbf{V}'}{2}; \quad (187)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{R} - \mathbf{R}'); \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{V} - \mathbf{V}'). \quad (188)$$

Тогда уравнение (186) в этих переменных запишется в виде

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \nabla_{\mathbf{R}_0} P_0 + \mathbf{W} \nabla_{\mathbf{Q}} P_0 = -\frac{i\hbar}{2M} \nabla_{\mathbf{R}_0} (\nabla_{\mathbf{Q}} P_0). \quad (189)$$



Пусть  $P_0$  является достаточно плавной функцией  $\mathbf{R}_0$ . Тогда в уравнении (189) можно положить  $\hbar \rightarrow 0$  и пренебречь правой частью. Положим  $P_0 = F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)U(\mathbf{Q}, \mathbf{W}, t)$ . Тогда согласно уравнению (189) функция распределения  $F$  удовлетворяет уравнению свободного движения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \nabla_{\mathbf{R}_0} F = 0. \quad (190)$$

А для функции  $U$  (используя метод разделения переменных) находим:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\hbar}{2M} (\mathbf{K} - \mathbf{K}') \nabla_{\mathbf{Q}} U = 0, \quad (191)$$

где мы положили  $\mathbf{V} = \hbar \mathbf{K} / M$ .

Теперь нетрудно видеть, что  $U(\mathbf{Q}, \mathbf{W})$  является аналогом функции Вигнера, т.е. матрицы плотности в смешанном представлении. Если в уравнении (191) волновые векторы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{K}'$  заменить, соответственно, на операторы  $i\nabla_{\mathbf{R}}$  и  $-i\nabla_{\mathbf{R}'}$ , а затем перейти от  $\mathbf{K}, \mathbf{K}'$  представления (импульсного представления) к обычному, то получим

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{Q}}^2 U. \quad (192)$$

Как мы видим, в отсутствие коллапсов, функция  $U$  удовлетворяет уравнению Шрёдингера свободного движения.

Итак, мы можем представить матрицу распределения в виде

$$P_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{V}_0, t) = F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t) U\left(\frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}'}{2}\right). \quad (193)$$

Здесь функция распределения  $F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)$  соответствует диагональной части матрицы распределения. А фактор  $U[(\mathbf{R} - \mathbf{R}')/2]$  с нормировкой  $U(0) = 1$  описывает недиагональные члены матрицы распределения (т.е. матрицы плотности огибающих).

Рассмотрим вопрос об описании недиагональных элементов матрицы распределения (или матрицы плотности огибающих). В случае  $t \ll M$  в экспоненте форм-фактора (178) первое слагаемое можно не учитывать в течение некоторого промежутка времени, а тяжелую частицу в начальном состоянии можно считать неподвижной. Пусть начальная волновая функция равна  $\Psi_0(\mathbf{R})$ . Тогда начальная матрица распределения (при  $V = 0$ ) совпадает с начальной матрицей плотности и обе они пропорциональны произведению  $\Psi^*(\mathbf{R})\Psi_0(\mathbf{R}')$ . Соответственно, функция распределения  $F_0(\mathbf{R}, \mathbf{V})$  начального состояния равна  $F_0(\mathbf{R}, \mathbf{V}) = |\Psi_0(\mathbf{R})|^2 |\delta(\mathbf{V})|$ , а диагональная часть матрицы плотности  $\rho_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = |\Psi_0(\mathbf{R})|^2$ . Поскольку скорость  $V$  некоторое время

остается равной нулю, то обсудим сначала только координатную часть матрицы распределения.

Первый же коллапс рассеянной легкой частицы приводит к локализации волновой функции тяжелой частицы с профилем (178), если этот коллапс произошел вблизи  $\mathbf{R} = 0$ . Таким образом, внутри рассматриваемого подансамбля с коллапсированной волновой функцией, после первого коллапса получаем

$$\Psi(\mathbf{R}) = A \exp\left\{-\frac{R^2}{3b^2}\right\}. \quad (194)$$

Здесь  $A$  — некоторый нормировочный множитель. С помощью (194) нетрудно найти матрицу плотности сколлапсированного подансамбля:

$$\rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \Psi(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{R}') = A^2 \exp\left\{-\frac{2R_0^2}{3b^2} - \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{6b^2}\right\}. \quad (195)$$

Здесь мы использовали обозначение  $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{R} + \mathbf{R}')/2$ . Как мы видим,  $\rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  распадается на два множителя: диагональный  $F_0$  и недиагональный  $U = \exp\left\{-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{6b^2}\right\}$ . Диагональный множитель  $F_0$  соответствует тому случайному факту, что мы выбрали подансамбль, соответствующий коллапсу вблизи  $\mathbf{R} = 0$ . В принципе, такая локализация может происходить вблизи любой точки  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_a$ . Если оставаться внутри исходного ансамбля, то выражение (195) следовало бы усреднить по всем возможным положениям коллапса с весом  $A^2$ , пропорциональным  $|\Psi_0(\mathbf{R}_a)|^2$ . Следовательно, первые же коллапсы превращают матрицу плотности в выражение

$$\rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \left|\Psi_0\left(\frac{\mathbf{R} + \mathbf{R}'}{2}\right)\right|^2 U(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|). \quad (196)$$

Здесь недиагональная часть матрицы плотности описывается функцией

$$U(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|) = \exp\left\{-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2}{6A^2}\right\}, \quad (197)$$

где  $A = b$ .

Функция  $U(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$  описывает фактически те волновые пакеты, на которые разбивается начальная волновая функция тяжелой частицы в результате коллапсирования волновых функций легких частиц.

Последующие коллапсы волновых функций легких частиц будут приводить к монотонному убыванию  $A$  со временем. Чтобы понять, как это происходит, выберем подансамбль с начальной волновой

функцией (194). Центры последующих коллапсов могли бы быть слегка сдвинуты относительно начала координат, но поскольку мы интересуемся недиагональной частью матрицы плотности, мы пренебрежем этим эффектом. А именно, предполагая, что центры последующих коллапсов выбираются пропорционально  $|\Psi|^2$  на предыдущем шаге, будем считать, что все последующие коллапсы центрированы около начала координат. В этом приближении каждый новый коллапс добавляет множитель вида (194). Допустим для простоты, что сечения рассеяния легкой частицы на тяжелой и легкой частицы на легкой равны между собой. Тогда среднее время между коллапсами будет равно  $\tau = \lambda/v_T$ . Здесь  $\lambda = 1/\sigma n$ ,  $\sigma$  — поперечное сечение такого рассеяния,  $n$  — плотность легких частиц,  $v_T$  — их тепловая скорость.

Если каждый коллапс добавляет множитель вида (194), то волновой пакет будет со временем стягиваться в точку по закону

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = A_t \exp\left\{-\frac{R^2 t}{3b^2 \tau}\right\}. \quad (198)$$

Здесь  $A_t$  — некоторый нормировочный множитель, зависящий от выбора подансамбля. Введем обозначение  $\kappa = 1/3b^2 \tau$ . Согласно (198) имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\kappa R^2 \Psi + \Gamma \Psi, \quad (199)$$

где  $\Gamma = \dot{A}_t/A_t$ . Мы допустим, что  $\Gamma = \text{const}$ . Если локализация волновой функции тяжелой частицы становится достаточно узкой, то нужно учитывать кинетическую энергию частицы. Для этого можно составить обобщенное уравнение Шрёдингера с учетом коллапсов:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 \Psi - i\hbar \kappa R^2 \Psi + i\hbar \Gamma \Psi. \quad (200)$$

Это уравнение отличается от (199) только учетом оператора кинетической энергии. Как мы видим, уравнение (200) соответствует квантовому осциллятору с мнимым коэффициентом упругости.

При больших временах установившееся решение уравнения (200) можно искать в виде  $\Psi = \exp\{-i\Omega t - R^2/2A^2\}$ . Подставляя это выражение в (200), получим

$$A^{-2} = (1 - i)A_0^2, \quad A_0 = b\left(\frac{3m}{2M}\right)^{1/4}, \quad \Omega = \frac{3\hbar}{2MA_0^2}, \quad (201)$$

где мы положили  $\Gamma = 3\hbar^2/2MA_0^2$ , чтобы частота  $\Omega$  была чисто действительной величиной.

Зная  $\Lambda$ , мы можем оценить добавку  $\Delta E = \hbar^2/M\Lambda^2$  к кинетической энергии тяжелой частицы, возникающую вследствие коллапсирования ее волновой функции. Величина  $\Delta E$  может быть значительно меньше величины  $Tm/M$ , т.е. средней передаваемой энергии при рассеянии легкой частицы на тяжелой. Это значит, что при рассмотрении процессов коллапсирования с  $\Lambda > b$  можно не обременять себя учетом соответствующего баланса энергии.

Учтем теперь первый член под знаком экспоненты в форм-факторе (178). Он описывает передачу импульса тяжелой частице от рассеянных легких частиц. Под действием толчков волновой пакет тяжелой частицы должен придти в движение. Волновая функция движущегося пакета выглядит как

$$\Psi_{\mathbf{R}_0\mathbf{V}_0} = \exp\left\{-i\Omega t - \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)^2}{2\Lambda^2} + i\frac{M\mathbf{V}_0}{\hbar}\mathbf{R}\right\}. \quad (202)$$

Здесь  $\mathbf{R}_0$  — радиус-вектор "центра тяжести" пакета, а  $\mathbf{V}_0 = \hbar\mathbf{K}_0/M$  — его скорость,  $\mathbf{K}_0$  — волновой вектор. Как мы видим, волновая функция имеет "индексы", равные  $\mathbf{R}_0$  и  $\mathbf{V}_0$ , а экспоненту  $\exp\left\{-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)^2}{2\Lambda^2}\right\}$  можно рассматривать как огибающую плоской волны. Зная вид волновой функции, мы можем ввести в рассмотрение матрицу распределения

$$P(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{V}_0, t) = F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)U(\mathbf{R} - \mathbf{R}'). \quad (203)$$

Здесь  $F(\mathbf{R}_0, \mathbf{V}_0, t)$  — функция распределения, соответствующая диагональной части матрицы распределения, а недиагональный фактор  $U$  описывает волновые пакеты. Если функция распределения слабо меняется на размерах масштаба ширины локализации волнового пакета, то для описания эволюции  $F$  можно использовать кинетическое уравнение. А недиагональный фактор дается выражением (197), где ширина локализации  $\Lambda$  является функцией времени.

Согласно соотношению (198) размер пакета убывает со временем по закону  $\Lambda \approx b(\tau/t)^{1/2}$ , пока не достигнет стационарного значения  $\Lambda_0$ . Величина  $\Lambda_0$  согласно соотношению (201) имеет порядок величины  $b(m/M)^{1/4}$ . При увеличении  $M$  локализация тяжелой частицы стремится к нулю: мы получаем переход к классической частице. "Внутренние измерения" в газе сами собой проводят к классическому поведению массивных частиц. Соотношение (201) получено нами в предположении, что сечение рассеяния  $\sigma$  атома на атоме совпадает с сечением рассеяния  $\sigma_B$  атома на броуновской частице. Если  $\sigma_B \neq \sigma$ , то величину  $\kappa$  в уравнении (199) следует увеличить в  $\sigma_B/\sigma$  раз, так что установившаяся ширина волнового пакета броуновской частицы уменьшается по сравнению со значением (201) в  $(\sigma/\sigma_B)^{1/4}$  раз.

Разумеется, соотношением (201) можно пользоваться только для частиц малого размера, так что  $\sigma_B \ll \lambda^2$ .

Итак, для описания поведения тяжелой частицы оказывается удобным несколько видоизменить метод матрицы плотности. А именно, здесь вводится матрица плотности для огибающих волновых пакетов. Чтобы не смешивать ее с обычной матрицей плотности, она называется матрицей распределения. Уравнение для матрицы распределения (185) в случае плавного распределения ее диагональных элементов естественно распадается на два независимых уравнения. Диагональная ее часть соответствует функции распределения, удовлетворяющей кинетическому уравнению, а недиагональная часть соответствует форм-фактору  $U(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$  волновых пакетов. Гипотеза о квантовом молекулярном хаосе приводит к уравнению (200), описывающему эволюцию волнового пакета. Согласно этому уравнению последующие коллапсы приводят к большей локализации пакета, а сам пакет имеет гауссово распределение в пространстве.

Соответственно, мы приходим к следующему сценарию движения квантовой броуновской частицы. При любом начальном состоянии, в том числе когерентном, частица эволюционирует в соответствии с уравнением Шрёдингера с поглощением, описывающим исчезновение когерентности. На этом фоне возникают коллапсы волновой функции в любом конкретном представителе статистического ансамбля. Первый же коллапс в каждом данном представителе ансамбля уничтожает начальную волновую функцию и порождает волновой пакет с размером  $b \sim \sqrt{\lambda \lambda_B}$ , где  $\lambda$  — длина пробега легких частиц, а  $\lambda_B$  — их средняя длина волны де Бройля. Последующие коллапсы дополнительно уменьшают недиагональные члены матрицы распределения, но статистическое поведение броуновской частицы определяется уже не недиагональной частью, а классическим кинетическим уравнением для функции распределения, т.е. диагональной частью матрицы распределения.

Таким образом, общая картина броуновского движения квантовой частицы, вытекающая из гипотезы о квантовом молекулярном хаосе, кажется вполне естественной. Она позволяет описать многие конкретные примеры необратимых квантовых процессов.

## 38. Молекулярный хаос

Выше мы привели качественные аргументы в пользу рассмотрения декогерентности волновых функций в газе как своего рода "скрытых или внутренних измерений". На примере броуновской частицы было показано, как такую декогерентность можно описывать на языке

уравнения Ланжевена для случайной волновой функции. Теперь наша задача состоит в более точном описании волновых функций атомов газа. Фактически, мы должны найти подходящий метод для описания квантового хаоса в газе. К такому описанию мы будем подходить шаг за шагом, начиная с более простых теоретических моделей.

Разреженный газ квантовых частиц со слабым взаимодействием можно рассматривать как своего рода квантовый ансамбль. Допустим, что мы имеем ансамбль совершенно одинаково приготовленных изолированных систем. Квантовой теорией такой ансамбль называется чистым. Ясно, что все представители такого ансамбля эволюционируют в точности одинаковым образом и притом совершенно обратимо по времени. Совсем другая картина возникает в том случае, когда системы не изолированы от внешнего мира. В случае классического газа неизоллированность означает просто возможность неупругих столкновений молекул газа со стенками. Неупругие столкновения приводят к силам вязкого трения газа о стенки. Эти силы производят дополнительное затухание звуковых волн, и согласно флуктуационно-диссипационной теореме приповерхностный слой газа должен генерировать дополнительный звуковой шум. Такой шум практически никак не участвует в энергетике газа, но приводит к малым относительным смещениям молекул газа, т.е. к своеобразному "сбою фаз". Парные столкновения быстро, по закону  $\exp(t/\tau)$ , наращивают возмущения со временем. В результате, ансамбль систем становится как бы "смешанным": его отдельные представители эволюционируют по разным траекториям фазового пространства. Соответственно, обратимость по времени полностью исчезает и описывать такой ансамбль можно лишь статистически.

Попытаемся, тем не менее, описать такой газ с позиций квантовой механики. В случае чистого ансамбля такое описание не представляет принципиальных трудностей: достаточно лишь составить уравнение Шрёдингера для всей системы, а затем попытаться решать его тем или иным способом. Однако взаимодействие системы с окружением должно резко изменить картину эволюции. Если воспользоваться знаменитым "принципом соответствия", то мы должны постулировать, что даже слабая декогерентность должна сильно повлиять на эволюцию системы. Для каждой отдельной молекулы эта эволюция выглядит как цепь последовательных рассеяний. Чтобы внешнее влияние на рассеянные волны могло быть достаточно сильным, нужно предположить, что фазы отдельных рассеянных волн "сбиваются" и частица попадает только в одну из рассеянных волн. Как известно, такой процесс принято называть "коллапсом" волновой функции  $\psi$ . У разных представителей статистического ансамбля

коллапсы различаются, следуя принципу вероятностей  $\sim |\psi|^2$ . Именно из-за коллапсов чистый квантовый ансамбль превращается в смешанный. Универсальный подход к описанию таких необратимых смешанных ансамблей пока недостаточно развит, поэтому мы используем здесь некоторые приближенные методы, опираясь в значительной мере на качественные соображения. Главное наше допущение состоит в том, что каждой молекуле или атому газа следует приписать волновую функцию в виде некоторого компактного волнового пакета. Наша задача состоит в описании поступательного движения таких пакетов, их рассеяния друг на друге и поддержания определенных размеров и формы волновых пакетов [79].

Описание газа в терминах волновых пакетов естественно начать с рассмотрения одиночного пакета. Можно предположить, что размеры и форма волновых пакетов должны определяться естественными процессами взаимодействия между молекулами или атомами газа. Но стартовать удобно с некоторой заданной извне канонической формы волнового пакета, в качестве которой мы примем функцию вида

$$\psi = \exp\left\{ik_0x - \frac{x^2}{A^2}\right\}. \quad (204)$$

Для простоты мы ограничиваемся здесь одномерным случаем. Координата  $x$  отсчитывается от центра волнового пакета. Величина  $A$  характеризует размер волнового пакета вдоль оси  $x$ , а  $k_0$  — некоторое усредненное волновое число.

Преобразованием Фурье по  $x$  нетрудно найти форму пакета в пространстве волновых чисел:

$$\psi_k = \exp\left\{-\frac{(k - k_0)^2 A^2}{2}\right\}. \quad (205)$$

Величина  $v_0 = \hbar k_0/m$  характеризует скорость волнового пакета. Допустим, что распределение по скоростям волновых пакетов имеет вид распределения Максвелла с температурой  $T$ :

$$F(v_0) = B \exp\left\{-\frac{mv_0^2}{2T}\right\}, \quad (206)$$

где  $B$  — фактор нормировки.

Если квадрат волновой функции (205) умножить на функцию распределения (206), и усреднить результат по  $v_0$ , то мы получим выражение для диагональных элементов матрицы плотности

$$\rho(k, k) = B_1 \exp\left\{-\frac{\hbar^2 k^2}{2me}\right\}, \quad (207)$$

где величина  $\varepsilon$  определяется соотношением

$$2\varepsilon = T + \frac{\hbar^2}{2m\Lambda^2}. \quad (208)$$

Соотношение (208) можно интерпретировать следующим образом. Величина  $T$  представляет собой истинную температуру свободной частицы, соответствующую температуре движущихся волновых пакетов, а выражение  $\hbar^2/2m\Lambda^2$  отвечает как бы удвоенной "внутренней" энергии волнового пакета. Эта энергия положительна, так что волновой пакет сам по себе распадается со временем и требуется некоторое воздействие извне, чтобы поддерживать равновесные размеры пакета. Как мы увидим, такое воздействие осуществляется последовательными коллапсами волновых функций.

Рассмотрим разреженный газ в условиях, когда поведение молекул или атомов газа близко к классическому. Более конкретно, мы предположим, что  $a^3n = a/\lambda \ll 1$ , где  $a = \sqrt{\sigma}$  — величина, характеризующая размер молекулы. Кроме того, условимся считать  $\sqrt[3]{n}\lambda_B \ll 1$ , где  $\lambda_B = \hbar/mv_T$  — де-бройлевская длина волны,  $v_T$  — тепловая скорость.

Предположим, что в начальном состоянии при  $t = 0$ , волновые функции молекул выглядят как волновые пакеты типа (204). Выберем некоторую пробную частицу и проследим за ее эволюцией. Допустим, что ширина пакета  $\Lambda$  не очень мала, а именно  $\Lambda^2 \geq \lambda\lambda_B$ . В этом случае квантовомеханическое расплывание волнового пакета за время свободного пробега  $\tau = \lambda/v_T$  оказывается не больше  $\Lambda$ .

За время  $\tau$  пакет со средней скоростью  $v_T$  последовательно покрывает собой область за областью с общим объемом порядка  $\Lambda^2\lambda$ . В этом объеме находится  $N = n\Lambda^2\lambda$  частиц. Будем считать, что  $N \gg 1$ . Можно сказать, что за время  $\tau$  рассматриваемый нами волновой пакет испытывает  $N \gg 1$  рассеяний, причем рассеянные волны заполняют объем  $\sim \lambda^3$ . За последующие промежутки времени порядка  $\sim \tau$  волны перерассеиваются, так что создается чрезвычайно сложная картина волнового поля. Если рассматриваемая нами система является изолированной, т.е. не подверженной никаким возмущениям извне, то соответствующая сложно организованная волновая функция отвечает когерентному состоянию. Это состояние, хотя и является очень зыбким и нежным, должно быть обратимым во времени: при обращении времени в любой момент  $t$  система должна вернуться в начальное состояние. Это значит, что в обращенной по времени системе все ранее расходящиеся рассеянные волны должны превратиться в сходящиеся волны, притом "настроенные" настолько точно, чтобы в конце концов они могли "слиться" в исходные



волновые пакеты при  $t = 0$ . Соответственно, следует считать, что в любой установившейся картине когерентного состояния, при  $t \gg \tau$ , должны в равной мере присутствовать расходящиеся и сходящиеся волны.

Допустим теперь, что рассматриваемый нами газ начинает взаимодействовать с окружением вследствие неупругих столкновений молекул газа со стенками, имеющими ту же самую температуру  $T$ , что и газ. Стенки, как мы знаем, создают тепловой шум, который со скоростью звука распространяется внутрь объема. Этот шум наверняка приведет к разрушению нежной картины когерентного состояния. Прежде всего, он собьет фазы у бывших сходящихся волн, так что останутся только рассеянные расходящиеся волны. Одно только это обстоятельство приводит к разрушению обратимости. Но на самом деле вмешательство окружения оказывается гораздо более сильным, и это можно пояснить следующим образом.

Как мы установили выше, исходный волновой пакет создает на длине свободного пробега  $N$  рассеянных волн. Слабое внешнее возмущение может легко сбить фазы между волнами, а сама микро-частица в силу ее неделимости сможет оказаться только в одной из этих волн. Но и фазы отдельных участков избранной рассеянной волны могут быть легко сбиты, так что частица может очутиться только в одном из небольших участков рассеянной волны. Происходит коллапс волновой функции в новый волновой пакет. Трудно сказать, в какой именно момент времени происходит коллапсирование, но если вернуться в прошлое вдоль траектории вновь возникшего пакета, то можно найти тот небольшой объемчик, где произошло рассеяние. Так что с точки зрения последующей эволюции волновой функции этот коллапс можно условно отнести к моменту рассеяния.

Пусть перед коллапсом волновой вектор пакета был равен  $\mathbf{k}_i$ , а после коллапса —  $\mathbf{k}_j$ . Можно сказать, что частица со скоростью  $\hbar\mathbf{k}_i/m$  рассеялась в направлении скорости  $\hbar\mathbf{k}_j/m$ . Процесс этот чисто случайный, так что волновая функция в виде набора волновых пакетов также является случайной. Если выбор вероятностей образования пакетов следует закону  $\sim |\psi|^2$ , то статистическое описание процессов рассеяния и коллапсирования автоматически приведет к уравнению Больцмана с вероятностями переходов, рассчитываемых по правилам квантовой теории.

Для нас большой интерес представляет динамика волновых пакетов. Рассмотрим временную историю некоторого волнового пакета наугад выбранной пробной частицы. Траектория такого пакета выглядит как ломаная линия, состоящая из прямолинейных отрезков, имеющих в среднем длину  $\lambda$ . Случайные изломы опреде-

ляются вероятностями рассеяния. После каждого из изломов происходит коллапс волновой функции к форме, близкой к (204). Для получения качественной картины процесс дискретных коллапсов можно заменить на непрерывное коллапсирование. Кроме того, удобно ограничиться одномерным случаем и рассматривать коллапсы в системе координат с осью  $x$ , направленной вдоль движения пакета (на каждом из отрезков траектории нужна своя система координат).

В этом приближении коллапсирование можно описать множителем типа  $A(t) \exp\{-x^2/2b^2\tau\}$ , на который нужно умножить волновую функцию частицы. Здесь через  $b$  мы обозначили ширину форм-фактора коллапсирования. За время  $t$  происходит как бы  $t/\tau$  коллапсов с суммарным форм-фактором  $\exp\{-x^2/2b^2\tau\}$ , а множитель  $A(t)$  учитывает нормировку волновой функции. Соответственно в приближении непрерывного коллапсирования уравнение Шрёдингера для волновой функции пробной частицы принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} - i \frac{\hbar x^2}{2b^2\tau} \psi + i\hbar\gamma\psi, \quad (209)$$

где  $\gamma = \dot{A}/A$ .

Установившееся решение этого уравнения ищем в виде  $\psi = \exp\{i\omega t - x^2/2A^2\}$ , а величину  $\gamma$  подбираем таким образом, чтобы частота  $\omega$  была действительной. Подставляя это выражение для  $\psi$  в уравнение (209), получаем:

$$A^{-2} = (1 - i)A_0^{-2}, \quad \omega = \gamma = \frac{\hbar^2}{2mA_0^2}, \quad A_0^2 = \sqrt{\frac{2\hbar b^2\tau}{m}}. \quad (210)$$

Мы пока еще не знаем, чему равна ширина пакета  $b$ , отнесенная к самому началу коллапса. Если принять приближенно  $b \simeq A_0$ , то получим

$$A^{-2} = (1 - i)A_0^{-2}, \quad A_0 = \sqrt{\frac{2\hbar\tau}{m}} = \sqrt{2\lambda\lambda_B}. \quad (211)$$

Другими словами, установившаяся ширина пакета оказывается порядка средне-геометрического значения величин  $\lambda$  и  $\lambda_B$ .

Как мы видим, в модели непрерывного коллапсирования величина  $|\psi|^2 = \exp\{-x^2/A_0^2\}$  сохраняет постоянную форму, т.е. всем молекулам газа приписываются одинаковые по форме пакеты, и все различие между ними состоит только в разных значениях их скоростей  $v_0 = \hbar k_0/m$ . Если  $k_0 A_0 \gg 1$ , то волновой пакет (204) мало отличается от плоской волны. Соответственно, вероятности рассеяния за счет

парных взаимодействий частиц могут быть рассчитаны в приближении плоских волн.

Модель непрерывного коллапсирования является слишком упрощенной. Поэтому представляет интерес рассмотреть более реалистичный случай последовательных коллапсов. Но и при этом разумно пойти на некоторые упрощения. Прежде всего представим себе траекторию пробной частицы в виде некоторой ломаной линии. Удобно эту линию распрямить и уложить вдоль оси  $x$ , пренебрегая некоторыми тонкостями поведения волновых пакетов вблизи точек рассеяния. Далее, можно приближенно принять, что последовательные рассеяния происходят не по закону случая, а в точности на расстоянии  $\lambda$  друг от друга. И наконец, пренебрежем изменениями скорости частиц при переходе от одного отрезка свободного движения к другому, полагая  $k_0 = mv_T/\hbar$ , где  $v_T$  — средняя тепловая скорость. Кроме того, оставим пока свободным параметром величину ширины пакета  $b$  при каждом из коллапсов. Итак, мы приходим к задаче периодического коллапсирования, так что достаточно рассмотреть лишь один период, когда волновая функция испытывает коллапс (204) с  $A = b$  и при  $t = 0$  и подходит к следующему коллапсу при  $t = \lambda/v_0$ .

Нетрудно проверить, что уравнение Шрёдингера для свободно движущейся частицы имеет решение вида

$$\psi = A^{-1} \exp \left\{ -i\omega t + ik_0 x - \frac{(x - v_0 t)^2}{2A^2} \right\}, \quad (212)$$

где  $\omega = \hbar^2 k_0^2 / 2m$ ,  $v_0 = \hbar k_0 / m$ , а величина  $A^2$  является линейной функцией времени:

$$A^2 = b^2 + i \frac{\hbar}{m} t. \quad (213)$$

Здесь мы выбрали начальное значение  $A = b$  при  $t = 0$ . Именно это решение и описывает эволюцию волновой функции после коллапса при  $t = 0$ . С помощью (213) нетрудно найти среднее значение  $\langle (x - v_0 t)^2 \rangle$ , которое мы обозначим через  $A_a^2$ :

$$A_a^2 = b^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b^2}. \quad (214)$$

С помощью соотношения (214) волновую функцию (212) можно представить в виде

$$\psi = A^{-1} \exp \left\{ -i\omega' t + ik_0' x' - \frac{x'^2}{2A^2} \right\}, \quad (215)$$

где введены следующие обозначения:

$$\omega' = \omega - k_0 v_0, \quad x' = (x - v_0 t) \quad (216)$$

$$k'_0 = k_0 + \frac{\hbar t}{2mb^2 \Lambda_a^2} x'.$$

Как мы видим, волновой вектор  $k'_0$  линейно зависит от  $x'$  вследствие дисперсии волн де Бройля, так что "носковая" часть волнового пакета является более коротковолновой по сравнению с "хвостовой" его частью.

Рассмотрим теперь баланс энергий вблизи второго коллапса при  $t = \tau$ . Перед коллапсом энергия частицы может быть подсчитана с помощью волновых функций (212) или (215). Она равна

$$E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{4mb^2}. \quad (217)$$

Здесь первое слагаемое описывает кинетическую энергию пакета, перемещающегося со скоростью  $v_0 = \hbar k_0/m$ , а второе слагаемое соответствует "внутренней" энергии покоящегося пакета. Найдем величину энергии сразу после коллапса. Предположим, что коллапс произошел вблизи точки  $x_0$ . Его можно учесть дополнительным множителем  $\exp\{-(x' - x_0)^2/2b^2\}$  у волновой функции (215). Найдем сначала энергию  $E(x_0)$  коллапсированного состояния по стандартным правилам квантовой механики:  $E(x_0) = \langle \psi_0^* H \psi_0 \rangle$ , где  $H$  — гамильтониан, а  $\psi_0$  дается выражением (216) с дополнительным фактором  $\exp\{-(x' - x_0)^2/2b^2\}$ .

Чтобы не усложнять выкладок, удобно рассмотреть случай  $b^2 \ll \Lambda_a^2$ , где  $\Lambda_a^2$  вычисляется по формуле (214) при  $t = \tau$ . Тогда получим

$$E_0 \simeq \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ k_0^2 + \frac{1}{2b^2} + \frac{2k_0}{b} \frac{x_0}{\Lambda_a} + \frac{x_0^2}{b^2 \Lambda_a^2} \right\}. \quad (218)$$

Здесь первые два слагаемых в скобках соответствуют энергии частицы перед повторным коллапсом.

Если бы вероятности коллапса были распределены по закону  $|\psi|^2$ , т.е. как  $\exp\{-x^2/\Lambda_a^2\}$ , то средняя по  $x_0$  энергия (218) оказалась бы равной

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ k_0^2 + \frac{1}{b^2} \right\}.$$

Иными словами, второй коллапс добавил бы энергию  $\hbar^2/4mb^2$ , равную "внутренней" энергии перед коллапсом. Но такого увеличе-

ния энергии не может быть, так как иначе коллапсы монотонно увеличивали бы энергию частицы. В каждом элементарном столкновении импульс сохраняется просто в силу согласования фаз сталкивающихся и рассеивающихся волн в системе центра масс частиц. А для сохранения энергии в среднем требуется предположить, что коллапсы слабо отклоняются от закона  $|\psi(x_0)|^2$ : коллапсы должны более часто происходить в области  $x_0 \leq 0$ , т.е. в той части волнового пакета, где локальный импульс несколько меньше. Принятое здесь выражение "отклонение от закона  $p \sim |\psi|^2$ " не является вполне точным. Дело в том, что координата  $x_0$  — это всего лишь центр волного пакета после коллапса. Волновая функция после коллапса не равна  $\delta$ -функции, а остается достаточно протяженной по  $x$ . Поэтому рассматриваемый нами коллапс не является проекцией на одну из ортогональных волновых функций: соответствующее "измерение" не является полным. Эффект асимметрии коллапсов возникает как результат неортогональных проекций в случае непрерывного спектра собственных волновых функций.

Пусть среднее значение  $\langle x_0 \rangle$  не равно нулю и отрицательно, а величина  $\langle x_0^2 \rangle$  перед коллапсом по-прежнему равна  $L_0^2/2$ . Величину  $\alpha = -\langle x_0 \rangle/L_a$  условимся называть параметром асимметрии. Чтобы закон сохранения энергии удовлетворялся в среднем, величина  $\alpha$  должна быть равна

$$\alpha = -\frac{\langle x_0 \rangle}{L_a} = \frac{1}{4} k_0 b. \quad (219)$$

По порядку величины  $\alpha \simeq \sqrt{\lambda_B/\lambda}$ .

Следует еще раз подчеркнуть, что коллапсы возникают вследствие разрушения сложно организованных когерентных состояний. Мы условно отнесли их к моментам времени сразу после рассеяния. Но на самом деле само рассеяние может быть установлено только продолжением в прошлое того состояния, которое возникло в результате коллапса. Возникает своего рода обратная корреляция, которая не обязана заканчиваться на предшествующем рассеянии, а может распространяться на два или несколько предыдущих рассеяний. Таким образом, коллапсы следует рассматривать как растянутый во времени процесс, усиленный парными взаимодействиями частиц. Поэтому модели непрерывного и дискретного коллапсирования представляют собой лишь два предельных упрощенных подхода к описанию реального процесса.

### 39. Волновые функции атомов газа

Волновые функции атомов разреженного газа обычно представляют себе в виде плоских волн. Это допущение, почерпнутое из стандартной двухчастичной теории рассеяния, где всегда можно считать, что  $|in\rangle$  и  $|out\rangle$  состояния находятся вне области взаимодействия, кажется здесь вполне естественным. В самом деле, в разреженном газе длина свободного пробега много больше среднего расстояния между атомами. Поэтому рассеянные волны успевают распространиться на большое расстояние от точки рассеяния, и их локальная структура приближенно выглядит как плоская волна. В действительности, этот вопрос требует более детального исследования, поскольку в отличие от обычного двухчастичного рассеяния атомы газа постоянно взаимодействуют друг с другом.

Дело в том, что на длине свободного пробега волна некоторого определенного атома, скажем, с номером  $j$  успевает рассеяться на большом количестве других атомов, образуя сложный узор из множества рассеянных волн. Можно сказать, что возникает очень сложно организованная когерентная структура из множества рассеянных волн. Достаточно очевидно, что такая структура не может существовать в газе с хаотически движущимися атомами. При последующих рассеяниях газовая среда может "воспринять" только одно из возможных значений импульса рассеиваемой частицы. Можно сказать, что внутри газа существует постоянно действующий механизм декогерентности, т.е. "самоизмерений", который случайно выбирает только одну из возможных рассеянных волн, а остальные волны при этом просто уничтожаются. Другими словами, даже самое простое представление волновых функций в виде плоских волн предполагает наличие постоянно действующего механизма коллапсирования, который производит "очистку" волновых функций от "пустых волн".

Но реальная ситуация должна быть даже несколько сложнее. Допустим, что частица с номером  $j$  действительно оказалась в одной из рассеянных волн с некоторым определенным импульсом  $\hbar\mathbf{k}_j$ , где  $\mathbf{k}_j$  — волновой вектор. Возвращаясь в прошлое вдоль направления импульса, можно найти место рассеяния и установить номер частицы, скажем  $q$ , на которой это рассеяние произошло (разумеется, вдоль импульса  $\hbar\mathbf{k}_q$  рассеивающей частицы нужно тоже вернуться в прошлое). В среднем, для этого следует вернуться в прошлое на время столкновений  $\tau = \lambda/v_T$ , где  $\lambda = 1/n\sigma$  — средняя длина свободного пробега,  $n$  — плотность атомов газа,  $\sigma$  — поперечное сечение рассеяния,  $v_T$  — средняя тепловая скорость. Допустим, что при таком

возврате в прошлое волновая функция атома с номером  $j$  выглядит как волновой пакет  $\exp[i\mathbf{k}_j \mathbf{r}_j - (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{0j})^2/2A^2]$ . Здесь фактор  $\exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{r}_j)$  соответствует коротковолновому "наполнению" пакета в виде плоской волны, а фактор  $\exp[-(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{0j})^2/2A^2]$  представляет собой неизвестную пока огибающую волнового пакета с центром локализации  $\mathbf{r}_{0j}$ . Допустим, что при рождении пакета параметр  $A^2 = b^2$ , где  $b^2$  — константа, определяющая ширину вновь рожденного пакета. Оказывается, что константа  $b^2$  может быть найдена с помощью достаточно простых рассуждений.

Пусть волновой пакет с начальной формой  $\exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2/2b^2]$  эволюционирует в соответствии с уравнением Шрёдингера. Тогда величина  $A^2$  должна быть равна  $b^2 + i\hbar t/m$ , где время  $t$  отсчитывается от момента рождения волнового пакета. Среднее время существования волнового пакета до последующего рассеяния равно, очевидно,  $\tau = \lambda/v_T$ . Поэтому среднее значение  $A^2$  равно  $A^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$ . Грубо говоря, все волновые пакеты имеют в среднем стандартную гауссову форму с  $A^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$ , если в момент рождения они имели гауссову форму с  $A^2 = b^2$ .

Соответственно, при ретроспективном взгляде на эволюцию волновых пакетов их можно считать "пульсирующими" образованиями с начальным значением  $A^2 = b^2$  и конечным значением  $A^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$ .

Рассмотрим теперь сам коллапс волнового пакета, когда  $A^2$  быстро изменяется от значения  $A^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$  до значения  $A^2 = b^2$ . Можно считать, что этот коллапс происходит потому, что коллапсирует волновая функция частицы  $q$  — второго партнера процесса рассеяния. Если после коллапса волновая функция частицы с номером  $q$  выглядит как гауссов пакет с  $A^2 = b^2$ , то мы можем вернуться обратно по времени к моменту рассеяния, и тогда у частицы  $q$  величина  $A^2$  будет равна  $A^2 = b^2 - i\hbar\tau/m$ , т.е. она равна среднему сопряженному значению  $(A^2)^*$  параметра  $A^2$  для частицы с номером  $j$ . Но рассеянные частицы  $j, q$  обладают совместной волновой функцией в точке  $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_q$ , поэтому коллапс частицы с номером  $q$  автоматически создает форм-фактор  $\exp[-(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{0j})^2/2A_0^{*2}]$  у волновой функции частицы  $j$ . Другими словами, имеем  $\exp[-(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{0j})^2/2A^{*2}] \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0j})^2/2A^2] = \exp[-(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{0j})^2/2b^2]$ . Отсюда находим  $A^{-2} + A^{*-2} = b^{-2}$ , т.е.  $b^2 = \hbar\tau/m$ . Так как

$$|\psi|^2 = \exp\left[-\frac{b^2(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{0j})^2}{|A|^4}\right],$$

то размеры пакета  $|\psi|^2$  пульсируют от начального значения  $b^2 = \hbar\tau/m$  до конечного значения  $|A|^4/b^2 = 2\hbar\tau/m$ .

Если пренебречь этими пульсациями, то мы приходим к модели непрерывного коллапсирования. Эту модель можно пояснить следующим образом. Каждый волновой пакет имеет конечное время жизни  $\tau$ . В силу этого его энергия должна быть уширена на величину  $\hbar/2\tau$ . Соответствующее уширение в пространстве волновых чисел  $k$  может быть найдено из соотношения  $\hbar^2 k^2/2m = \hbar/2\tau$ . При столкновении (рассеянии) двух волновых пакетов частицы обмениваются импульсами, а кроме того, за счет сложения двух неопределенностей волновых чисел порядка  $k$ , происходит регулярное уширение их пакетов по  $k$ . Этот эффект в модели непрерывного коллапсирования можно приближенно учесть с помощью одномерного уравнения диффузии в  $k$ -пространстве:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial k^2} + \gamma \psi. \quad (220)$$

Здесь  $\psi$  — волновая функция пакета,  $D = \hbar^2/2\tau$  — коэффициент диффузии по  $k$ , а константа  $\gamma$  добавлена для учета нормировки  $|\psi|^2$ . Если перейти в конфигурационное пространство, то оператор  $\partial^2/\partial k^2$  следует заменить на  $-(x - x_0)^2$ , где координата  $x$  отсчитывается вдоль движения пакета, а  $x_0$  — центр волнового пакета. При переходе к трехмерному пространству коллапсирование следует учитывать по всем трем координатам. Добавляя оператор кинетической энергии, мы можем получить обобщенное уравнение Шрёдингера для модели непрерывного коллапсирования:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - i \frac{\hbar(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2\Lambda_0^2 \tau} \psi + i\hbar \gamma \psi, \quad (221)$$

где  $\Lambda_0^2 = 2\hbar\tau/m$ .

Установившееся решение этого уравнения имеет вид

$$\psi = \exp \left[ -i\omega t - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2\Lambda^2} \right], \quad (222)$$

где  $\omega = \gamma = 3/4\tau$ ,  $\Lambda^{-2} = (1 - i)\Lambda_0^{-2}$ ,  $\Lambda_0^2 = 2\hbar\tau/m$ . Величина  $\gamma$  подобрана здесь таким образом, чтобы частота  $\omega$  была действительной. Как мы видим, ширина волнового пакета определяется величиной  $\Lambda_0^2 = 2\hbar\tau/m$ . По порядку величины  $\Lambda_0 \cong \sqrt{\lambda\lambda_B}$ , где  $\lambda_B = \hbar/mv_T$  — средняя длина волны де Бройля. Средне-геометрическое значение из макроскопического  $\lambda$  и микроскопического  $\lambda_B$  параметров явно указывает на область мезоскопии. Так как обычно  $\lambda_B \ll \lambda$ , то волновые пакеты выглядят как компактные образования, похожие на классические частицы. Траекто-



рии их центров выглядят как ломаные линии с прямыми отрезками между столкновениями и с резкими изломами при столкновениях. Столкновения описываются обычной квантовой механикой, а общее поведение пакетов с учетом случайных коллапсов может быть описано кинетическим уравнением.

Изложенный выше подход явно вводит в рассмотрение коллапсы волновых функций. Тем самым волновым функциям придается информационный характер с включением процессов "самоизмерений", когда волновая функция частицы полностью уничтожается в тех областях пространства, где данная частица отсутствует. Не удивительно поэтому, что уравнение вида (221) может быть использовано для моделирования непрерывных измерений [80].

Естественно, может возникнуть вопрос, а почему бы для описания газа не воспользоваться стандартным аппаратом квантовой механики. Поскольку в разреженном газе взаимодействие атомов мало, то наиболее подходящей кажется теория возмущений. Вопрос об использовании теории возмущений для описания разреженного газа был подробно проанализирован в работах Пригожина и Петроски [43, 81, 82]. Они показали, что прямое применение теории возмущений приводит к расходимостям. Связано это с тем, что классический газ представляет собой типичный пример большой системы Пуанкаре, обладающей внутренней стохастичностью. Соответственно, в квантовой теории возникает парадокс саморассеяний, аналогичный проблеме малых знаменателей в классической теории. Чтобы обойти трудности с квантовыми расходимостями, Петроски и Пригожин развивают сложный аппарат описания квантовых систем в представлении Лиувилля. Но более предпочтительным является подход с явным использованием коллапсов волновых функций.

Рассмотрим теперь волновую функцию  $\Psi$  газа в целом. В нулевом приближении по взаимодействию волновая функция естественно распадается на произведение волновых функций одиночных частиц:

$$\Psi^0 = \prod_j \psi_j^0. \quad (223)$$

В этом соотношении мы не учли пока принцип тождественности частиц. Каждая из функций нулевого приближения  $\psi_j^0$  удовлетворяет уравнению Шрёдингера одиночной частицы. С учетом коллапсирования, она имеет вид волнового пакета (222).

Учтем теперь тождественность частиц. Нам удобно начать с бозе-частиц, и тогда в выражении (223) нужно добавить оператор  $P$ , переставляющий частицы и суммирующий результаты всех переста-

новок (с соответствующей нормировкой). Умножим выражение (223) с оператором перестановок  $P$  на произведение сопряженных волновых функций типа (223), но без одной из функций, скажем,  $\psi_1^0(\mathbf{r})$ . Проинтегрируем результат по всем  $\mathbf{r}_j$ , кроме  $\mathbf{r}_1$ . Тогда мы получим функцию  $\psi(\mathbf{r})$ , в которой мы заменим  $\mathbf{r}_1$  на  $\mathbf{r}$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_j \psi_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0). \quad (224)$$

Здесь  $\psi_j$  — волновая функция пакета номера "j",  $\mathbf{r}_j^0$  — центр волнового пакета. В модели непрерывного коллапсирования имеем с точностью до нормировки

$$\psi_j = \exp \left[ i\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0)^2}{2\Lambda^2} \right]. \quad (225)$$

Здесь  $\mathbf{k}_j$  — волновой вектор пакета с номером "j". Таким образом, симметризованная одночастичная волновая функция (224) выглядит как набор волновых пакетов (225).

Умножая  $\psi(\mathbf{r})$  на  $n\psi^*(\mathbf{r})$ , получим

$$n|\psi(\mathbf{r})|^2 = \sum_j |\psi_j(\mathbf{r}^2)|^2 + \sum_{j \neq l} \psi_l^*(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r}). \quad (226)$$

Здесь первое слагаемое соответствует сумме "пиков" вблизи центров пакетов вида (225). В классическом пределе эта сумма превращается в микроскопическую плотность  $n_\mu$ :

$$n_\mu = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0). \quad (227)$$

Как мы видим, первое слагаемое в (226) аналогично выражению (227) с "уширенными"  $\delta$ -функциями: вместо  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0)$  нужно подставить функцию  $A \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0)^2/\Lambda_0^2]$  нормированную на единицу.

Что касается второго слагаемого в (226), то оно оказывается малым. Дело в том, что в произведения вида  $\psi_l^*(\mathbf{r}) \psi_j(\mathbf{r})$  дают вклад только перекрывающиеся волновые пакеты и знак произведения не определен. Оценить второе слагаемое можно, взяв квадрат его модуля и усреднив результат по  $\mathbf{r}$ . Такая оценка показывает, что вклад второго слагаемого не больше флуктуаций плотности и поэтому мы им пренебрежем.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ограничиться единичным объемом газа. Тогда средняя плотность  $n$  будет отличаться от  $n_\mu$  на малую величину  $\delta n = n_\mu - n$ , а флуктуации плотности будут масштаба

$\delta n \times 1 \text{ см}^3 \sim \sqrt{n \times 1 \text{ см}^3} \ll n \times 1 \text{ см}^3$ , если  $n \gg 1 \text{ см}^{-3}$ . Такими флуктуациями мы также пренебрежем.

В сумме (226) можно ограничиться только теми пакетами, которые попадают в рассматриваемый нами единичный объем. Соответственно функцию  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  будем считать нормированной на единицу  $|\psi|^2 = 1$ .

Рассмотрим теперь произведение  $\prod \psi(\mathbf{r}_j)$ . Представим его (с точностью до нормировки) в виде

$$\prod_j \psi(\mathbf{r}_j) = P \prod_j \psi_j(\mathbf{r}_j) + \prod_j \psi_l(\mathbf{r}_j). \quad (228)$$

Здесь первый член справа отвечает произведению, когда все  $\psi_j(\mathbf{r}_j)$  различны, а второе слагаемое (записанное в символическом виде) соответствует таким членам, когда две или более частиц попадают в одну и ту же "ячейку" размером  $\Lambda_0^3$ . В невырожденном бозе-газе при нормальной эволюции волновой функции  $\Psi(t)$  с рассеянием волновых пакетов друг на друга, ситуация с двумя частицами в одном пакете — чрезвычайно редкое событие.

Но и чисто формально второй член в правой части (228) гораздо меньше первого: ведь первый член создается  $n!$  перестановками частиц, а во втором члене при попадании двух частиц в один и тот же пакет число возможных перестановок равно  $n(n-2)!$ , т.е. в  $(n-1)$  раз меньше. Так как по предположению  $n \gg 1$ , то вторым членом в (228) можно пренебречь.

Итак, функции  $\psi(\mathbf{r})$ , даваемые выражением (228), составляют естественный базис для приближенного представления любого состояния атомарного газа. Поэтому функции вида (224) можно назвать динамическим базисом. Волновая функция  $\Psi$  всех частиц в нулевом приближении по взаимодействию равна просто

$$\Psi = \prod_j \psi(\mathbf{r}_j). \quad (229)$$

Разумеется, это представление является приближенным, поскольку оно предполагает, что все  $\psi_j(\mathbf{r})$  имеют форму стандартных волновых пакетов в модели непрерывного коллапсирования. Однако ничто не мешает нам найти более точные выражения для  $\psi_j(\mathbf{r})$  и учесть рассеянные волны.

Рассмотрим теперь несколько иное представление волновой функции (224). Каждая из входящих туда индивидуальных функций  $\psi_j$  имеет вид (225), т.е.  $\psi_j = a_j \exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{r})$ , где  $a_j = \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^0)/2\Lambda^2]$  представляет собой огибающую волнового пакета. Каждый из волновых пакетов имеет свое собственное "наполнение" в виде плоской

волны  $\exp(ik_j r_j)$ . Пользуясь этим, мы можем перенумеровать частицы, расположенные в рассматриваемом нами единичном объеме. А именно, мы можем расположить их в порядке возрастания координат  $r_j^0$  и волновых чисел  $k_j$ . Тогда вместо номера  $j$  можно использовать пару векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k}$  (поскольку  $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}^0$  можно не делать различия между  $\mathbf{r}^0$  и  $\mathbf{r}$ ). В соответствии с этим полагаем:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} a(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (230)$$

Здесь  $\psi(\mathbf{r})$  — это та же самая волновая функция (224), а амплитуды  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  представляют собой однопородные огибающие вида  $(1/\sqrt{n}) \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{k}})^2/2\Lambda^2]$ . Плотность  $n$  считаем пока постоянной. Функцию вида (224) можно подставить в уравнение Шрёдингера. Если в этом уравнении пренебречь малыми членами, содержащими  $U_{jl}$  и  $\Delta_j a$ , то получим уравнение свободного распространения огибающих волновых пакетов:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla a = 0. \quad (231)$$

Здесь мы ввели обозначение  $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$  для средней скорости волнового пакета. Нетрудно видеть что точно такому же уравнению свободного движения удовлетворяет и функция распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , определяемая соотношением

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n \left| a(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \right|^2. \quad (232)$$

Здесь плотность  $n$  считается постоянной.

Сделаем еще два замечания. Первое: с помощью функций вида (225) нетрудно найти матрицу плотности. Ее диагональные элементы совпадают со средним значением  $|\psi_j(\mathbf{r})|^2$ , а недиагональные члены соответствуют выбранной нами стандартной форме волновых пакетов (225). Второе: при выводе выражения (224) для волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$  мы предполагали, что имеем дело с бозе-частицами. Но поскольку выражение для огибающей  $a(\mathbf{r})$  определено с точностью до произвольного фазового множителя  $\exp(i\alpha)$ , выражением (224) можно пользоваться и для ферми-частиц при температурах, далеких от вырождения. Таким образом, в разреженном теплом газе можно не делать различия между бозе- и ферми-статистиками.

Итак, мы узнали, как устроены волновые пакеты атомов газа и как поддерживается форма этих пакетов за счет коллапсов. При этом мы

пользовались уравнением Шрёдингера с дополнительной гипотезой об уничтожении волновых функций, не отвечающих реальному положению частиц в пространстве.

Но квантовая механика позволяет еще определить эволюцию  $|\psi|^2$  с последующей интерпретацией этой величины как вероятности попадания частицы в соответствующую область пространства. Ясно, что наше описание газа в терминах волновых пакетов должно быть согласовано с эволюцией  $|\psi|^2$ . Поэтому коллапсы должны следовать закону  $p \sim |\psi|^2$ , где  $p$  — соответствующая вероятность. Можно сказать, что закон  $p \sim |\psi|^2$  является как бы наложенной извне связью (constraint), которой должны подчиняться коллапсы волновых функций в газе.

Кинетическое или управляющее уравнение записывается обычно для функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f = S_I(f). \quad (233)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость частицы, соответствующая величине  $\hbar\mathbf{k}/m$  волнового пакета. Правая часть уравнения (233) представляет собой член столкновений, состоящий из двух нелинейных интегральных выражений. Первое из них описывает убыль частиц со скоростью  $\mathbf{v}$ , и его приближенно можно представить в виде  $-f/\tau$ . А второе выражение описывает поступление частиц в окрестность скорости  $\mathbf{v}$  за счет их столкновений. В предельно простом случае так называемого  $\tau$ -приближения этот член можно записать в виде  $f_0/\tau$ , где  $f_0$  — максвелловская функция распределения.

Обычно кинетическое уравнение выводят путем нахождения рассеянных волн с последующей интерпретацией  $|\psi|^2$  как вероятности данного рассеяния. Но можно поступить и по-другому.

Учтем в уравнении (231) затухание амплитуды  $a$  и возможность рождения пакета с волновым вектором  $\mathbf{k}$  за счет рассеяния на других атомах. Мы получим кинетическое уравнение для амплитуды:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla a + \frac{1}{2\tau} a = S_2, \quad (234)$$

где  $a = a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — амплитуда волнового пакета.

В принципе, можно было бы попытаться найти выражение для  $S_2$  путем прямых вычислений. Но мы поступим проще. А именно, поскольку модуль  $|a|^2$  связан с функцией распределения  $f$  соотношением (232), найдем с помощью (234) уравнение для  $f$ . Для этого умножим (234) на  $na^*(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и сложим результат с комплексно

сопряженным уравнением. В результате получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f = -\frac{1}{\tau}f + n(a^*S_2 + aS_2^*). \quad (235)$$

Правая часть этого уравнения должна представлять собой член столкновений  $St(f)$  кинетического уравнения Больцмана. Пользуясь упрощенным  $\tau$ -приближением, положим

$$St(f) \cong -\frac{1}{\tau}(f - f_0), \quad (236)$$

где  $f_0$  — максвелловская функция распределения. В этом приближении  $a^*S_2 + aS_2^* = f_0/n\tau$ . Наряду с  $a, a^*$  введем в рассмотрение амплитуды  $a_0, a_0^*$ , отвечающие максвелловскому распределению, так что в среднем  $n|a_0|^2 = f_0$ . Если считать, что разность  $a - a_0$  мала, то с точностью до линейных членов включительно  $S_2 = (2a_0 - a)/2\tau$ , так что в  $\tau$ -приближении имеем

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla a = -\frac{1}{\tau}(a - a_0). \quad (237)$$

Здесь  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  — амплитуда пакета с волновым числом  $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$ , а  $a_0$  — амплитуда пакета, принадлежащего равновесному распределению, так что среднее значение  $n|a_0|^2 = f_0$ .

Уравнение (237) представляет собой линейный по  $a$  упрощенный вариант уравнения (234). По сути дела, приближенное выражение  $S_2 \cong (2a_0 - a)/2\tau$  ухватывает только самые основные черты  $S_2$ : оба они описывают "инжекцию" пакетов за счет столкновений с темпом, пропорциональным  $n$ , и с максвелловски равновесной функцией распределения.

Уравнение (237), подобно кинетическому уравнению (235), предполагает отнесение его к макроскопическим объемам фазового пространства. Это значит, что одна амплитуда  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  может соответствовать многим волновым пакетам с одним и тем же значением  $\mathbf{k}$  (с точностью до  $\Delta k \sim \kappa$ ). Поэтому убывание амплитуды  $a \sim \exp(-t/\tau)$ , описываемое уравнением (237), означает просто уменьшение числа пакетов с заданным волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Точно так же член  $a_0/\tau$  в правой части (237) описывает инъекцию новых пакетов с более или менее гладким (в среднем) распределением по пространству.

Нетрудно проверить, что из уравнения (237) следует кинетическое уравнение (235) с членом столкновений (236), если пренебречь квадратичным слагаемым по малой разности  $(a - a_0)$ .

Итак, мы выяснили, как должны выглядеть волновые функции обычного разреженного газа. Описание в терминах волновых пакетов

дает больше возможностей для исследования необратимых процессов, чем это позволяет обычное кинетическое или управляющее уравнение.

## 40. Квантовый хаос в газе

Рассмотрим атомарный газ с плотностью частиц  $n$  при температуре  $T$ . Температуру  $T$  будем считать высокой по сравнению с температурой вырождения. Соответственно, величину  $\lambda_B = \hbar/mv_T$ , где  $m$  — масса атомов,  $v_T$  — их средняя тепловая скорость, мы будем считать значительно меньшей среднего межатомного расстояния  $n^{-1/3}$ . Условимся называть  $\lambda_B$  средней длиной волны де Бройля (она в  $2\pi$  раз меньше обычной длины волны де Бройля). Газ будем считать разреженным, так что средняя длина пробега  $\lambda = 1/n\sigma$ , где  $\sigma$  — поперечное сечение рассеяния, значительно больше межатомного расстояния. В соответствии с принятыми допущениями отношение  $\lambda_B/\lambda$  должно считаться малым параметром.

Как было показано выше, вся эволюция газа представляет собой квантовый хаос. Строго описать такой хаос практически невозможно, и поэтому наша задача состоит в развитии и приближенном обосновании качественной картины такого хаоса [83].

Будем исходить из предположения, что фазы множества рассеянных волн одной частицы "сбиваются" хаотически движущейся средой, так что частица, как единая сущность, может попасть только в одну из рассеянных волн. Такой процесс выглядит как "измерение" волновой функции данной частицы, производимое самим газом. "Измерения", точнее "самоизмерения", осуществляют последовательные коллапсы волновых функций атомов, и соответственно, волновую функцию любого атома можно представить себе в виде некоторого компактного волнового пакета. Наша задача состоит в более подробном описании движения волновых пакетов, их рассеяния друг на друге и поддержания определенных размеров и формы волновых пакетов.

Выберем некоторую пробную частицу и допустим, что в начальный момент  $t = 0$  ее волновая функция имеет вид волнового пакета:

$$\psi(\mathbf{r}) = (\pi b^2)^{-3/4} \exp\left(i\mathbf{k}^0 \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}^2}{2b^2}\right). \quad (238)$$

Здесь  $\mathbf{k}^0$  — волновой вектор пакета, а радиус-вектор  $\mathbf{r}$  отсчитывается от центра пакета, параметр  $b$  определяет начальную ширину пакета. Для простоты будем считать, что параметр  $b$  является действительным числом.

Прямой подстановкой можно проверить, что уравнение Шрёдингера для свободного движения частицы удовлетворяется функцией

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{3/4} \Lambda^{-3} \exp\left[i\mathbf{k}^0 \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2}{2\Lambda^2}\right]. \quad (239)$$

где  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar t/m$ ;  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{v}^0 t$ ;  $\mathbf{v}^0 = \hbar \mathbf{k}^0/m$  — скорость волнового пакета. Согласно (239) волновой пакет расплывается со временем, так что среднее значение

$$\langle (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2 \rangle = \frac{3}{2} \left( b^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 b^2} \right).$$

В газе волновая функция пакета (239) должна затухать со временем как  $\exp(-t/2\tau)$ . Здесь  $\tau$  — среднее время парных столкновений, равное  $1/\nu$ , где  $\nu = n\sigma\langle u \rangle$  — средняя частота столкновений,  $\langle u \rangle$  — средняя относительная скорость. Так как распределение по относительным скоростям соответствует максвелловскому распределению с приведенной массой  $m/2$ , то

$$\langle u \rangle = \sqrt{2}v_T = 4\sqrt{\frac{T}{\pi m}},$$

где  $T$  — температура, измеряемая в энергетических единицах (постоянная Больцмана полагается равной единице). Таким образом, к моменту времени  $t = \tau$  после рождения волнового пакета его размеры определяются величиной

$$\langle (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)^2 \rangle = \frac{3}{2} \left( b^2 + \frac{\hbar^2 \tau^2}{m^2 b^2} \right).$$

Как функция  $b^2$  эта величина достигает минимума при  $b^2 = \hbar\tau/m$ . Естественно поэтому считать, что  $b^2$  равно именно этой величине, так что  $b \cong (\lambda\lambda_B)^{1/2}$ , если приближенно положить  $\tau \cong \lambda/\nu_T$ . Из последующего изложения станет более ясным, почему именно этим соотношением определяется размер пакета.

Рассмотрим теперь взаимодействие частиц, т.е. рассеяние волновых пакетов на частицах. Естественно начать с самого простого случая двух волновых пакетов вида (239). Пусть оба пакета родились в одно и то же время  $t = 0$  и сталкиваются друг с другом при  $t = \tau$ . Рассмотрим только лобовое столкновение пакетов с нулевым прицельным расстоянием. При таком столкновении закон сохранения импульсов автоматически удовлетворяется (так же, как и закон сохранения энергии), и поэтому мы будем следить только за эволюцией огибающих волновых пакетов вида (239). Совместную огибающую волнового



пакета частиц с координатами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  представим в виде

$$\psi = A \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1^0)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2^0)^2}{2A^2} \right], \quad (240)$$

где  $A$  — фактор нормировки. Введем переменные центра масс  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  и полурастояния частиц друг от друга  $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/2$ . Пусть  $\mathbf{R}^0 = (\mathbf{r}_1^0 + \mathbf{r}_2^0)/2$ ,  $\boldsymbol{\rho}^0 = (\mathbf{r}_1^0 - \mathbf{r}_2^0)/2$ . Выберем систему координат такую, чтобы центр масс пакетов покоился, т.е.  $\mathbf{R}^0 = 0$ . А радиус-вектор  $\boldsymbol{\rho}^0$  выберем в виде  $\boldsymbol{\rho}^0 = \mathbf{u}t'$ , где  $\mathbf{u} = (\mathbf{v}_1^0 - \mathbf{v}_2^0)/2$ ,  $t' = t - \tau$ . В переменных  $\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}$  волновая функция выглядит как

$$\psi = A \exp \left[ -\frac{R^2}{A^2} - \frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0)^2}{A^2} \right]. \quad (241)$$

Как мы видим, в переменных  $\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}$  огибающая волновой функции распадается в произведение

$$\exp \left( -\frac{R^2}{A^2} \right) \exp \left[ -\frac{(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^0)^2}{A^2} \right],$$

т.е. переменные  $\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}$  разделяются.

Будем считать, что размеры атомов очень малы. В этом приближении рассеяние происходит в точке  $\rho \cong 0$ . В этой точке падающая волна выглядит как

$$\exp \left( -\frac{R^2}{A^2} - \frac{u^2 t'^2}{A^2} \right).$$

А рассеянная волна выглядит как

$$\psi_f = \frac{B}{\rho} \exp \left[ -\frac{R^2}{A^2} - \frac{u^2 (t' - \rho/u)^2}{A^2} \right],$$

т.е. она отличается по фазе от источника излучения в точке  $\rho = 0$  на величину запаздывания  $\rho/u$ . Таким образом, для рассеянной волны получаем следующее выражение:

$$\psi_f = \frac{B}{\rho} \exp \left[ -\frac{R^2}{A^2} - \frac{(\rho - ut')^2}{A^2} \right]. \quad (242)$$

Здесь  $B$  — амплитуда рассеяния, а величина  $A^2 = b^2 + i\hbar t/m$ , где  $t = t' + \tau$  — время, отсчитываемое от первоначального рождения волновых пакетов.

По отношению к переменной  $\rho$  волновая функция (242) выглядит как тонкая сферическая оболочка с радиусом  $ut'$  и толщиной  $\sim \Lambda \ll \lambda$ . За время  $t' \sim \tau$  радиус оболочки достигнет величины  $\sim \lambda$  и ее отдельные области испытают столкновения с другими частицами. Ясно, что декогерентность, производимая такими столкновениями, разрушит тонко организованную оболочку волновой функции двух коррелированных частиц. Рассмотрим качественно, что при этом происходит.

Направим ось  $x$  вдоль направления предполагаемого повторного коллапса рассматриваемых нами частиц в системе центра масс. Удобно ввести новые переменные  $x = x_1 - ut'$ ,  $\bar{x} = x_2 + ut'$ , и тогда зависимость  $\psi$  от новых переменных выглядит как  $\exp[-(x^2 + \bar{x}^2)/2\Lambda^2]$ .

Что касается зависимости рассеянной волны от поперечных координат, то она целиком определяется зависимостью  $\psi$  от  $\mathbf{R}$  и выглядит как

$$\exp\left[-\frac{(y_1 + y_2)^2}{4\Lambda^2} - \frac{(z_1 + z_2)^2}{4\Lambda^2}\right].$$

Эта функция не зависит от переменных  $y_1 - y_2$ ,  $z_1 - z_2$ . Поэтому по этим переменным волновой пакет можно разрезать на куски с размерами, большими  $\Lambda$ . Но тогда каждый из таких кусков можно рассматривать как классический объект, т.е. можно пренебречь их расплыванием за время  $\sim \tau$ . Классические частицы имеют разбегающиеся траектории, так что приближенно можно считать, что

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{\tau^2}(y_1 - y_2), \quad (243)$$

и аналогично для разности  $(z_1 - z_2)$ . Так как разности  $(y_1 - y_2)$  отвечает приведенная масса  $m/2$ , то уравнению (243) соответствует потенциальная энергия  $U = -m(y_1 - y_2)^2/4\tau^2$ . Соответствующее уравнение Шрёдингера в пренебрежении членом кинетической энергии выглядит как

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = U\psi, \quad (244)$$

откуда получаем

$$\psi = C\rho^{-1} \exp\left[-\frac{m(y_1 - y_2)^2 t'}{4i\hbar\tau^2}\right],$$

где  $t'$  отсчитывается от момента рассеяния,  $C = \text{const}$ . Аналогичное выражение имеет место для зависимости  $\psi$  от  $z_1 - z_2$ . Найдем теперь,

что происходит с волновой функцией первой частицы. Для этого умножим функцию

$$\exp \left[ -\frac{(y_1 + y_2)^2}{4A^2} - \frac{(z_1 + z_2)^2}{4A^2} \right]$$

на сопряженную функцию относительного движения с учетом столкновений при  $t' = \tau$ , т.е. на

$$\exp \left[ \frac{m(y_1 - y_2)^2}{4i\hbar\tau} + \frac{m(z_1 - z_2)^2}{4i\hbar\tau} \right],$$

и проинтегрируем результат по  $y_2, z_2$ , воспользовавшись соотношением

$$\int \exp \left[ -\frac{(x - x')^2}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} \right] dx' = \left[ \frac{\pi a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \right]^{1/2} \exp \left[ -\frac{x^2}{(a^2 + b^2)} \right]. \quad (245)$$

После интегрирования получим выражение, пропорциональное  $\exp[-(y_1^2 + z_1^2)/(A^2 - i\hbar\tau/m)]$ . Как мы видим, за время  $t' = \tau$  величина  $A^2$  возвращается к своему исходному значению  $b^2$ .

Тот же результат можно получить несколько иным образом. Допустим, что вторая частица, находящаяся в коррелированной с первой частицей сферической оболочке, сталкивается с третьей частицей и коллапсирует в волновой пакет вида

$$\exp \left[ -\frac{(x - \bar{x})^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}{4A^2} \right]. \quad (246)$$

У этого пакета зависимость от  $x, y_1, y_2$  является точно такой же, как зависимость функции (242) от  $x$ . Если умножить выражение (242) на сопряженную функцию (246) и проинтегрировать результат по переменным  $y_2, z_2$ , то мы найдем "проекцию" (242) на коллапсирующую функцию. Тем самым мы выделяем в (242) ту компоненту, которая выживает после коллапсирования. Соответствующее вычисление дает выражение для коллапсированной волновой функции  $\psi_c$ :

$$\psi_c = \frac{B'}{\rho} \exp \left( -\frac{x^2 + y_1^2 + z_1^2}{A^2 + A^{*2}} \right) \quad (247)$$

Так как  $A^2 + A^{*2} = 2b^2$ , то функция (247) возвращается к своей первоначальной форме (238) волнового пакета первой частицы.

Рассмотрим тот же самый процесс на более физическом языке. Расширяющаяся по закону  $\rho = ut'$  сферическая оболочка из двух коррелированных частиц встречает на своем пути множество частиц и создает новые рассеянные волны. Если некоторая частица с номером "3", сталкивающаяся с расширяющей оболочкой, имеет вид волнового пакета  $\psi(\mathbf{r}_3)$ , то соответствующее рассеяние можно найти следующим образом. Представим волновую функцию расширяющейся оболочки в виде суперпозиции волнового пакета, такого же, как у встречного пакета, и оставшуюся за вычетом пакета часть. Выделенный нами волновой пакет повторит с встречной частицей тот же самый сценарий образования новой рассеянной сферической оболочки из двух скоррелированных частиц. А оставшаяся часть старой сферической оболочки за время взаимодействия  $\Delta t \sim \Lambda/v_T$  не успеет деформироваться, так что совместная волновая функция  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  окажется равной нулю в точке рассеяния  $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$  (все  $\mathbf{r}_i$  отсчитываются от центра масс первой пары частиц). Площадь оболочки  $4\pi\rho^2$  возрастает со временем как  $t'^2$ , поэтому число рассеяний и стохастизация волновой функции пары частиц  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  возрастает очень резко по мере приближения  $t'$  к  $\tau$ . Соответственно и переход  $\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2 - i\hbar\tau$  должен происходить достаточно резко.

Итак, мы приходим к следующей модели коллапсирования. Коллапс волновой функции в пакет  $\exp(-r^2/2b^2)$  происходит по всем трем направлениям при каждом "реальном" рассеянии. "Реальными" мы называем такое рассеяние и такой волновой пакет, в котором случайно оказывается зафиксирована частица. Все остальные возможные рассеянные волны и волновые пакеты должны просто уничтожаться, поскольку среда не может "наблюдать" одну и ту же частицу в состояниях с различными импульсами и энергиями одновременно. Коллапсы происходят в среднем через каждые  $\tau$  секунд. После очередного коллапса в нормированный на единицу волновой пакет, волновая функция пакета убывает со временем в среднем как  $\exp(-t/2\tau)$ , а квадрат волновой функции убывает как  $\exp(-t/\tau)$ . Такой закон убывания квадрата амплитуды со временем соответствует уменьшению вероятности рассеяний, но его можно интерпретировать просто как распределение коллапсов по закону Пуансона с вероятностью рассеяния  $\Delta t/\tau$  за промежуток времени  $\Delta t$ . За время  $t \sim \tau$  волновой пакет успевает создать множество рассеянных волн, и только одна из этих волн может породить в дальнейшем новый волновой пакет, "измеряемый" средой. Газ выполняет роль прибора, который "измеряет" передаваемые среде энергию и импульс при каждом реальном рассеянии с коллапсом волновой функции.

Все последовательные коллапсы должны быть согласованы между собой. Пусть частица номера "1" подходит к рассеянию при  $t = \tau$  с огибающей волновой функции  $\exp(-r_1^2/2A^2)$ , где  $A^2 = b^2 + i\hbar\tau/m$ . При рассеянии на частице с номером "2" она, по предположению, должна сколлапсировать в пакет  $\exp(-r_1^2/2b^2)$  из-за того, что ее предыдущий партнер по рассеянию испытывает к этому времени сильную декогерентность. В свою очередь, частица с номером "2" перед рассеянием и в момент рассеяния должна испытывать аналогичные изменения. С другой стороны, частица с номером "2" должна испытать коллапс при повторном рассеянии при  $t \cong 2\tau$ , превратившись в пакет вида  $\exp(-r_2^2/2b^2)$ , где  $r_2$  отсчитывается от центра пакета. Если от этого состояния частицы "2" вернуться к моменту времени  $t = \tau$ , то мы получим пакет вида  $\exp[-r_1^2/2(A^*)^2]$ , где  $(A^*)^2 = b^2 - i\hbar\tau/m$ . Этот пакет соответствует той компоненте в суперпозиции рассеянных волн, частицы "2", которая при  $t = 2\tau$  превратится в  $\exp(-r_2^2/2b^2)$ . Совместная волновая функция частиц с номерами "1" и "2", отвечающая пришедшему из прошлого пакету "1" и вычисленной из будущего составляющей волновой функции "2", в точке  $r_1 = r_2$  равна  $\exp[-r_1^2/2A^2 - r_1^2/2(A^*)^2]$ . Эта величина равна

$$\exp\left(-\frac{b^2 R^2}{b^4 + \hbar^2 \tau^2 / m^2}\right),$$

где  $\mathbf{R}$  — координата центра масс,  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ , при  $r_1 = r_2$ . С другой стороны, если относить коллапс к моменту рассеяния частиц 1 и 2 при  $t = \tau$ , то эта функция должна быть равна  $\exp(-R^2/2b^2)$ , где в точке рассеяния  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ . Отсюда находим:  $b^2 = \hbar\tau/m$ .

Итак, мы приходим к следующей упрощенной модели описания газа. Волновые функции атомов газа представляют собой волновые пакеты вида (239). При столкновении таких пакетов образуются сферические расширяющиеся оболочки скоррелированных пар частиц. При рассеянии на других частицах эти оболочки разрушаются, и волновые функции скоррелированных частиц снова коллапсируют в волновые пакеты вида (239), разлетающиеся в противоположные стороны в системе их центра масс. Приближенно, пренебрегая уничтожающимися "пустыми волнами", можно считать, что пакеты вида (239) образуют квазичастицы газа, движущиеся по классическим траекториям и рассеивающиеся друг на друге по статистическим законам квантовой механики. Каждый волновой пакет (239) имеет  $A^2 = b^2 = \hbar\tau/m$  при своем рождении, т.е. сразу после рассеяния, затем  $A^2$  изменяется по закону  $A^2 = b^2 + i\hbar t/m$ , где время  $t$  отсчитывается от момента рассеяния. В среднем, через  $t = \tau$  происходит повторное

рассеяние, и волновой пакет при этом уменьшает свои размеры до  $A^2 = b^2$ .

Волновой пакет вида (239) обладает средним импульсом  $mv^0 = \hbar k^0$  и средней энергией

$$\varepsilon = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{3\hbar^2}{4mb^2}, \quad (248)$$

где  $b^2 = \hbar\tau/m$ . Второй член в (248) возник от усреднения оператора  $-(\hbar^2/2m)\Delta$  с огибающей волновой функции (239). Второе слагаемое в (239) остается постоянным, если приближенно считать  $A = \text{const}$ . В этом приближении волновые пакеты похожи на классические частицы: они упруго сталкиваются, обмениваясь энергией и импульсом, а их внутренняя энергия  $3\hbar/4\tau$  остается постоянной.

При максвелловском распределении волновых пакетов по скоростям их средняя энергия (248) равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3T}{2} + \frac{3\hbar}{4\tau}, \quad (249)$$

где мы подставили  $\hbar\tau/m$  вместо  $b^2$ . Как мы видим, на одну степень свободы приходится энергия  $T/2 + \hbar/4\tau$ .

Найдем теперь давление  $p$ , оказываемое волновыми пакетами на зеркально отражающую стенку. Если считать, что каждый пакет представляет собой суперпозицию плоских волн вида  $\exp(ikx)$  и что каждая гармоника передает импульс с темпом  $\hbar^2 k^2/m$ , то давление следует вычислять усреднением оператора

$$\frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

с волновой функцией (239), а затем по максвелловскому распределению и умножением результата на плотность частиц  $n$ . Такое вычисление дает

$$p = nT + \frac{n\hbar}{2\tau}. \quad (250)$$

Как мы видим, давление отличается от давления идеального газа  $nT$  на малую величину  $n\hbar/2\tau$ .

Соотношения (248)–(250) были получены в приближении  $\tau = \text{const}$ . Проведем теперь более точное рассмотрение. Пусть волновой пакет перемещается вдоль оси  $x$  со скоростью  $v_0 = \hbar k_0/m$ . Тогда зависи-

мость его волновой функции от  $x$  без учета затухания выглядит как

$$\psi = \exp \left[ ik_0 x - \frac{(x - v_0 t)^2}{2\Lambda^2} \right], \quad (251)$$

где  $\Lambda^2 = b^2 + i\hbar t/m$ ,  $t$  отсчитывается от момента рождения волнового пакета. Учтем теперь затухание волновой функции (251) за счет столкновений. Пусть  $\nu(v)$  есть частота столкновений частицы с данной скоростью  $v$  с другими частицами. Имеем  $\nu(v) = \sigma n \langle u \rangle$ , где  $u$  — относительная скорость других атомов при заданной скорости рассматриваемой частицы:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} v_T \exp \left( -\frac{mv^2}{2T} \right) + \left( v + \frac{T}{mv} \right) \operatorname{erf} \left[ \left( \frac{mv^2}{2T} \right)^{1/2} \right], \quad (252)$$

$\operatorname{erf}(x)$  — интеграл вероятностей, равный

$$2\pi^{-1/2} \int_0^x \exp(-x^2) dx.$$

При  $v = 0$  имеем  $\nu(0) = \sigma n v_T$ , где  $v_T = (8T/\pi m)^{1/2}$  — средняя тепловая скорость атомов. При  $v^2 \gg v_T^2$  имеем  $\nu(v) = \sigma n v$ , а усредненное по  $v$  значение частоты столкновений равно  $\langle \nu(v) \rangle = \sqrt{2} \sigma n v_T$ , поскольку распределение по относительным скоростям соответствует максвелловскому распределению с приведенной массой  $m/2$ . Волновой пакет со средней скоростью  $v_0$  можно рассматривать как набор гармоник с различными волновыми числами  $k = mv/\hbar$ . Запишем  $\nu(v) = \nu(v_0) + \nu'(v - v_0)$ , где  $\nu' = (d\nu/dv)_{v_0}$ . Тогда слагаемое  $\nu'v$  приведет к затуханию волнового пакета вида  $\exp(-\nu'x/2)$ . Таким образом, зависимость от  $x, t$  волновой функции пакета с учетом затухания приобретает вид

$$\psi = \exp \left[ -\frac{\nu t}{2} + ik_0 x - \frac{(x')^2}{2\Lambda^2} - \frac{\nu' x'}{2} \right], \quad (253)$$

где  $x' = x - v_0 t$ ,  $\nu = \nu(v_0)$ ,  $\nu' = (d\nu/dv)_{v_0}$ .

В отличие от приближения  $\tau = \text{const}$  мы имеем  $\nu = \nu(v_0)$  и, кроме того, в выражении (253) появилось последнее слагаемое под экспонентой. Это слагаемое приводит к занижению амплитуды волны при  $x' > 0$  и к завышению амплитуды волны при  $x' < 0$ . Оказывается, что этот эффект приводит к систематическому замедлению пакета со временем. Действительно, согласно (253) имеем с точностью до

малых  $\sim 1/\lambda$

$$|\psi|^2 = \exp\left[-\frac{vt - (x'')^2}{b^2} \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)\right], \quad (254)$$

где  $x'' = x' + 0,5b^2v'(1 + t^2/\tau^2)$ ,  $b^2 = \hbar\tau/m$ .

Отсюда видно, что максимум огибающей пакета  $x_a$  движется равномерно.

С помощью волновой функции (253) можно подсчитать изменение импульса и энергии вследствие зависящего от  $x'$  затухания волновой функции. Соответствующий результат для энергии выглядит как  $\Delta\varepsilon = -\hbar v_0 t v' / 2\tau$ .

Эта величина вдвое меньше значения  $mv_0 \dot{x}_a$ , которое получилось бы при жестком замедлении пакета вместе с максимумом амплитуды его огибающей. Если  $t \sim \tau$ , то среднее изменение энергии имеет тот же порядок величины, что и второе слагаемое в (249).

Наличие эффекта замедления пакета показывает, что модель с неизменяющейся со временем энергией пакета является слишком упрощенной. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Учтем, что индивидуальный волновой пакет имеет неопределенность по энергии порядка  $\hbar/\tau$  и соответствующую неопределенность по импульсу. Рассмотрим баланс энергий на больших временах, т.е. в среднем по пакетам.

Удобно начать с рассмотрения пакета, который выжил время  $t \gg \tau$  после своего рождения. У такого пакета  $|A|^2 \gg b^2$ , так что его можно приближенно рассматривать как суперпозицию из многих волновых пакетов с размерами  $\sim b$ . При столкновении с обычными пакетами с размерами  $\sim b$  будет образовано много рассеянных волн, состоящих из пар скоррелированных частиц. На расстоянии  $\sim \lambda$  от области рассеяния такие волны будут некогерентны, поэтому они могут испытывать независимые коллапсы. Им соответствуют коллапсы исходного широкого пакета в отдельные его фрагменты размером  $\sim b$ . Если  $|A|^2 \gg b^2$ , то соответствующие локальные коллапсы почти ортогональны, так что можно воспользоваться представлениями обычной квантовой механики об "измерении". По отношению к продольной переменной  $x'$  такой коллапс можно учесть дополнительным множителем  $\exp[-(x' - x_0)^2/2b^2]$  у волновой функции, если коллапс произошел вблизи точки  $x_0$ .

Умножим (253) на этот множитель и с помощью полученной волновой функции вычислим энергию  $\varepsilon(x_0)$ . При  $t^2/\tau^2 \gg 1$  получаем

$$\varepsilon(x_0) = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\hbar}{4\tau} + \frac{\hbar^2 x_0^2}{2m|A|^4} + \frac{mv_0 x_0}{t} - \frac{mv_0 v'}{t} \left(x_0^2 + \frac{b^2}{2}\right). \quad (255)$$



Естественно предположить, что коллапсы распределены по  $x_0$  как  $|\psi(x_0)|^2 = \exp(-x_0^2 b^2 / |A|^4)$ . Но тогда усредненная по  $x_0$  энергия не совпадет с величиной (248). Чтобы энергия в среднем сохранялась, коллапсы должны происходить несколько асимметрично, так что  $\langle x_0 \rangle \neq 0$ . Усредняя (255) по  $x_0$  с весом  $\sim |\psi(x_0)|^2$  и допуская, что  $\langle x_0 \rangle \neq 0$ , получим при  $t^2 \gg \tau^2$ :

$$\varepsilon = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{\hbar}{2\tau} + \frac{mv_0 \langle x_0 \rangle}{t} - \frac{\hbar v_0 v' t}{2m \tau}. \quad (256)$$

Естественно считать, что закон сохранения энергии с точностью, большей  $\sim \hbar/\tau$ , должен выполняться только в среднем по максвелловскому распределению с учетом малых эффектов порядка  $\lambda_B/\lambda$ .

Усредним выражение (256) по максвелловскому распределению по скорости  $v_0$ . Поскольку направление оси  $x$  выбрано таким образом, что  $v_0 > 0$ , то усреднение величины  $v_0$  дает просто  $v_T$ , а среднее значение  $\langle v_0 v' \rangle$  оказывается равным  $1/2\tau$ . Если умножить второй член в правой части (256) на 3, чтобы учесть поперечные степени свободы, и усреднить (256) по максвелловскому распределению, то мы найдем среднюю энергию  $\langle \varepsilon \rangle$ . Она должна совпадать с величиной (249). Из этого условия находим

$$\langle x_0 \rangle = -\frac{3\lambda_B}{4} \frac{t}{\tau} + \frac{\lambda_B}{4} \frac{t^2}{\tau^2} \quad (257)$$

Это выражение получено при условии  $t^2 \gg \tau^2$ . Но поскольку (257) равно нулю при  $t = 0$ , как и точная величина  $\langle x_0 \rangle$ , то выражением (257) можно пользоваться как разумной аппроксимацией при всех значениях  $t/\tau$ .

Второй член в (257) компенсирует систематическое замедление центра пакета  $x_a$  вследствие зависимости частоты столкновений от скорости, как это описывается соотношением (254). Как мы видим, малой асимметрии коллапсов порядка  $\langle x_0 \rangle \sim \lambda_B = \hbar/mv_T$  достаточно для сохранения энергии частиц в среднем.

Итак, мы познакомились с двумя эффектами, учитываемыми малыми членами порядка  $\lambda_B/\lambda$ . Первый эффект такого порядка связан с появлением дополнительного слагаемого  $\hbar\hbar/2\tau$  в выражении для давления газа (250). Поясним его физический смысл. Как известно в модели реального газа Ван-дер-Ваальса, если принять для атомов газа представление о твердых шарах диаметра  $d$  без притяжения, давление равно  $p = nT(1 - a)^{-1} \cong nT(1 + a)$ . Здесь параметр  $a$  равен относительному вытесненному объему:  $a = 2\pi n d^3/3$ . Для учета кван-

товых поправок к этой величине следует добавить слагаемое  $2\pi n d^2 \lambda_B$ , учитывающее "свободную" от частиц оболочку толщиной  $\lambda_B$  у поверхности каждого атома. Такая оболочка образуется из-за того, что волновые функции обращаются в нуль на границе рассеяния, т.е. на сфере радиуса  $d$ . Так как  $\pi d^2 n = 1/\lambda$ , то получаем  $p = nT(1 + a + 2\lambda_B/\lambda)$ . Учитывая, что  $T = \pi m v_T^2/8$ ,  $\lambda_B = \hbar/mv_T$ ,  $\lambda = v_T \tau \sqrt{2}$ , получим

$$p = nT(1 + a) + \frac{\pi n \hbar}{4\sqrt{2}\tau}. \quad (258)$$

В пренебрежении параметром  $a$  это выражение близко к (250). Заметим, что малые слагаемые в соотношениях (249), (258) могут быть получены с помощью выражения (68) заменой  $L$  на величину порядка  $\lambda$ .

Еще один эффект порядка  $\lambda_B/\lambda$  возникает из-за зависимости частоты столкновений от скорости атома. Он выражается последним слагаемым подэкспоненциального выражения в правой части (253). Подавление "носовой" части пакета и повышение амплитуды его "хвостовой" части приводит к систематическому замедлению пакета. В результате его энергия убывает со временем как  $\Delta\epsilon = -\hbar v_0 t v'/2\tau$ , где  $v' = dv/dv$ . Это выражение можно представить в виде  $\Delta\epsilon = m v_0 \Delta v_0$ , где  $\Delta v_0$  представляет собой изменение средней скорости волнового пакета. Как оказывается, производная по времени от координаты  $x_0$  по времени вдвое больше, чем  $\Delta v_0$ :  $\dot{x}_0 = 2\Delta v_0$ . Комбинируя это соотношение с выражением для  $\Delta\epsilon$ , мы получим следующее соотношение:  $m v_0 \dot{x}_0 = -\hbar v_0 t v'/\tau$ . Усреднение этого соотношения по максвелловскому распределению дает возможность получить значение  $\langle x_0 \rangle = -\lambda_B t^2/2\tau^2$ . Такое систематическое замедление пакетов компенсируется вторым членом в выражении (257), т.е. малой асимметрией коллапсов. А первый член в этом выражении дает величину асимметрии, необходимую для компенсации возрастания энергии при коллапсе.

Выраженная в терминах асимметрии коллапсов картина сложного поведения многочастичной системы позволяет достаточно просто учесть малые эффекты порядка  $\lambda_B/\lambda$  при коллапсировании волновых функций атомов газа. Как мы видим, при каждом коллапсе имеет место систематическое смещение волнового пакета на расстояние порядка  $\lambda_B$ . Это смещение очень мало, но оно оказывается существенным для объяснения эффекта Соколова (см. раздел 41).

## КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И ИНФОРМАЦИЯ

Данная глава начинается с описания очень интересного эффекта, обнаруженного Ю. Л. Соколовым с сотрудниками. При экспериментах с возбужденными атомами водорода они заметили, что при пролете такого атома вблизи от металлической диафрагмы он как бы сам собой поляризуется. Знак поляризации соответствует некоторому сдвигу электронной оболочки от протона в сторону, противоположную направлению движения атома. Эффект этот явно необратим и не имеет пока других аналогов.

Оказывается, что эффект Соколова можно объяснить как результат когерентной суперпозиции взаимодействий Эйнштейна–Подольского–Розена. Пролетающий над поверхностью металла атом создает ЭПР-пару с каждым из электронов, который испытывает столкновение с поверхностью металла (подлетая к ней изнутри металла) в момент пролета атома. В результате образуется запутанное состояние атома с огромным количеством электронов металла. Величина соответствующей запутанности (см. комментарии) не превышает одного бита, поскольку атом находится в суперпозиции только двух состояний —  $2S$  и  $2P$ . В неподвижной системе координат состояния  $2S$  и  $2P$  разделены между собой лэмбовским сдвигом, а в лабораторной системе координат соответствующие уровни совпадают между собой: лэмбовский сдвиг компенсируется малым изменением скорости атома.

Изложенная в данной главе приближенная теория эффекта Соколова находится в согласии с экспериментами. Сам эффект и его величину удобно описывать в терминах корреляционного электрического поля — "поля Демона". Корреляционное поле чувствует только возбужденный атом — измерить такое поле с помощью обычного прибора нельзя.

Возможность создания квантово-коррелированных систем естественно приводит к постановке вопроса о возможности (или невозможности) использования квантовых корреляций для передачи информации. Этот вопрос достаточно подробно обсуждается в разделах 44 —

46. Оказывается, что квантовая передача информации на далекие расстояния запрещена основным принципом квантовой теории: вероятности любых квантовых событий следуют закону  $p \sim |\psi|^2$ . В силу этого разнесенные на большое расстояние партнеры ЭПР-пар не позволяют передавать систематическую информацию в процессах измерений над этими парами.

Однако, если оставаться "внутри интервала измерения", то возможность квантово-корреляционной коммуникации не исключена (так, по крайней мере, это представляется в настоящее время). Если характерное время релаксации необратимой квантовой системы равно  $\tau$ , то на расстояниях  $L \leq c\tau$  кажется возможной квантово-информационная связь, не ограниченная скоростью света. Ограничение  $L \leq c\tau$  следует не из-за превышения скорости сигнала над скоростью света, а из-за необходимости предварительного создания "канала связи", т.е. коррелированной квантовой системы.

Оказывается, что сверхсветовая связь в коррелированно-квантовых системах не противоречит релятивистскому принципу причинности: любая попытка создания "причинной петли" приводит к образованию составной квантовой системы, внутри которой принцип причинности продолжает действовать.

## 41. Эффект Соколова

Коллапсы волновых функций атомов газа обычно не наблюдаемы. Но это не значит, что они вообще всегда скрыты, и мы опишем далее эффект, где их роль оказывается определяющей. Мы имеем в виду явление, которое было обнаружено экспериментально Ю.Л. Соколовым с сотрудниками (см. [84]) и которое мы будем называть эффектом Соколова. Этот эффект был обнаружен в экспериментах по атомной интерферометрии [85], схема которых изображена на рис. 18.

В специальном устройстве S создавался пучок возбужденных атомов водорода в метастабильном состоянии  $2S$ : из небольшого плазменного источника вытягивались и ускорялись до энергии около

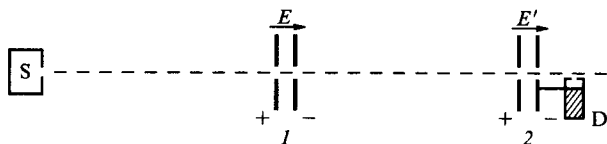


Рис. 18. Схема экспериментов по атомной интерферометрии: S — источник атомов водорода в метастабильном состоянии  $2S$ ; 1, 2 — двойные диафрагмы с продольным электрическим полем в промежутках; D — детектор излучения при  $2P \rightarrow 1S$ -переходах.

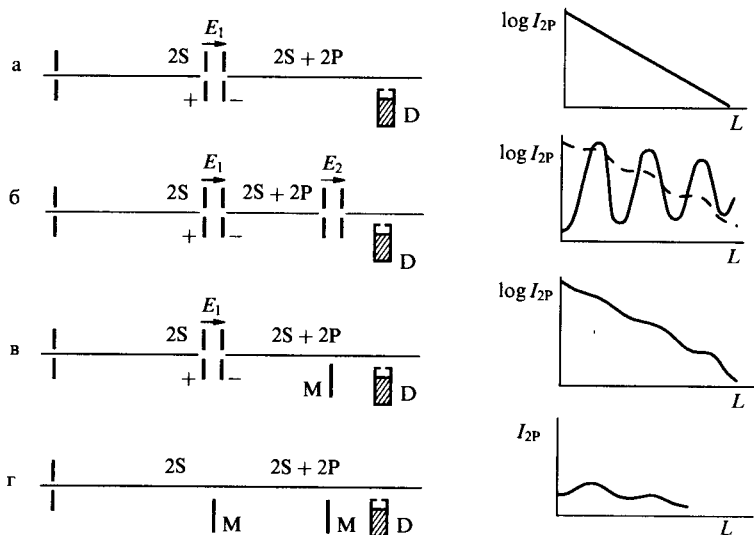
20 кэВ ионы водорода, которые затем перезаряжались на газовой мишени. После мишени образовывалось много возбужденных атомов, но на расстоянии в несколько метров оставались только метастабильные 2S-атомы. Эти атомы пропускались сначала через пару миниатюрных диафрагм ( $I$ ) с продольным электрическим полем, т.е. как бы сквозь небольшой конденсатор. В продольном электрическом поле каждый атом поляризовался, т.е. образовывалось состояние, представляющее из себя суперпозицию 2S- и 2P-состояний. Состояние 2P не является метастабильным: дипольным переходом оно распадается в основное состояние с излучением кванта лайман-альфа, который можно регистрировать детектором D. Кроме конденсатора  $I$  имелся еще конденсатор 2, жестко связанный с детектором D.

После пролета конденсатора  $I$  состояние 2P монотонно распадается, так что детектор D лайман-альфа-излучения показывает монотонно убывающую зависимость при удалении детектора от диафрагм  $I$  на расстояние  $L$  (рис. 19а). Но если перед детектором поместить второй конденсатор 2 с электрическим полем  $E_2$ , то на зависимости интенсивности лайман-альфа-излучения  $I_{2P}(L)$  появляется прекрасная картина интерференции (рис. 19б). Она возникает из-за того, что энергетические уровни 2S- и 2P-состояний находятся друг от друга на расстоянии лэмбовского сдвига с частотой около  $10^9$  Гц. Скорость атома водорода с энергией 20 кэВ составляет величину около  $2 \times 10^8$  см  $s^{-1}$ . Следовательно, фаза 2P-амплитуды испытывает колебания по отношению к фазе 2S-амплитуды, изменяясь на величину  $2\pi$  на длине около 0,2 см. Конденсатор 2, рождая новую добавку 2P-амплитуды из 2S-состояния, прибавляет ее к той компоненте, которая была до этого рождена в конденсаторе  $I$ . Так как фазы этих двух компонент разные, то и появляется возможность атомной интерференции двух 2P-амплитуд (рис. 19б).

Подчеркнем еще раз, что речь идет не об интерференции двух "лучей", а об интерференции двух 2P-амплитуд внутри одного и того же атома. Поскольку суперпозиция 2S + 2P выглядит как сдвинутое относительно протона электронное облако, то происходит как бы интерференция двух дипольных сдвигов электрона.

Лэмбовский сдвиг сам по себе мал, но реальная разность энергетических уровней 2S- и 2P-состояний в данном эксперименте еще меньше и оказывается практически равной нулю. Дело в том, что сдвиг уровней производится статическими электрическими полями, не меняющими суммарной собственной частоты энергетического уровня. Поэтому небольшое изменение энергии электронного уровня в точности компенсируется соответствующим изменением кинетической энергии атома. Можно сказать, что с учетом кинетической

энергии протона уровни 2S и 2P совпадают по энергии, так что переходы  $2S \rightarrow 2P$  и обратно  $2P \rightarrow 2S$  как бы эквивалентны изменению поляризации частицы без изменения энергии.



**Рис. 19.** Схема экспериментов по атомной интерферометрии: а — после прохождения конденсатора с полем  $E_1$  образуется смесь 2S- и 2P-амплитуд, и атомы в состоянии 2P распадаются, а соответствующая интенсивность  $I_{2P}$  монотонно убывает с расстоянием  $L$  от щели; б — вторая щель с полем  $E_2$  приводит к картине интерференции: штриховая линия — при слабом поле  $E_2$ , сплошная линия — при сильном поле  $E_2$ ; в — слабая интерференция появляется даже тогда, когда вместо второго конденсатора располагается металлическая пластина М; г — еще более слабая интерференция заметна, когда оба конденсатора заменены на металлические пластины М.

Эксперименты по атомной интерферометрии хорошо согласуются со стандартной квантовой теорией. Они позволили измерить лэмбовский сдвиг с очень большой точностью. Но не это нас интересует в первую очередь. Самое интересное состоит в том, что в экспериментах Соколова малая добавка 2P-амплитуды появлялась при пролете через вторую диафрагму 2 даже в отсутствие в ней какого-либо электрического поля. Более того, эта добавка появлялась просто при пролете 2S-атома вблизи металлической пластины (рис. 19в). Именно этот эффект мы и будем называть эффектом Соколова.

Эффект Соколова оказывается достаточно сильным. Результативно он выглядит так, как если бы вблизи диафрагмы или металличе-

ской пластины имелось продольное электрическое поле масштаба нескольких вольт на сантиметр, но в условиях эксперимента появление поля такой величины полностью исключено. Поскольку эффект сильный, то интерференцию удастся наблюдать даже в условиях, когда оба конденсатора заменены на металлические пластины (рис. 19г). Специально проведенными экспериментами было показано, что "поле Демона" (так называет его Ю.Л. Соколов) поляризует 2S-атом таким образом, что электронная оболочка немного отстает от протона.

Любые попытки объяснить эффект Соколова силовым взаимодействием атома с флуктуационными электрическими полями или с полем изображения в металле не приводят к успеху, давая вклад на порядки величины меньше нужного значения. Но оказывается [86], что эффект можно объяснить на основе представлений о коллапсах волновых функций электронов металла.

Для этого рассмотрим более подробно, как происходит взаимодействие возбужденного 2S-атома с электронами металла. Для простоты рассмотрим сначала случай, когда атом летит вдоль поверхности металла, находясь все время на постоянном расстоянии  $l_0$  от поверхности (рис. 20). Скорость атома обозначим через  $v_0$ . В экспериментах Соколова атомы водорода имели энергию около 20 кэВ, так что  $v_0 \cong 2 \times 10^8$  см  $\text{с}^{-1}$ . Эта величина несколько больше скорости  $v_F$  электронов металла на верхних уровнях распределения Ферми, составляющей около  $10^8$  см  $\text{с}^{-1}$ .

Пусть ось  $x$  направлена вдоль движения атома. Дипольному переходу  $2S \rightarrow 2P$  вдоль этой оси отвечает дипольный момент

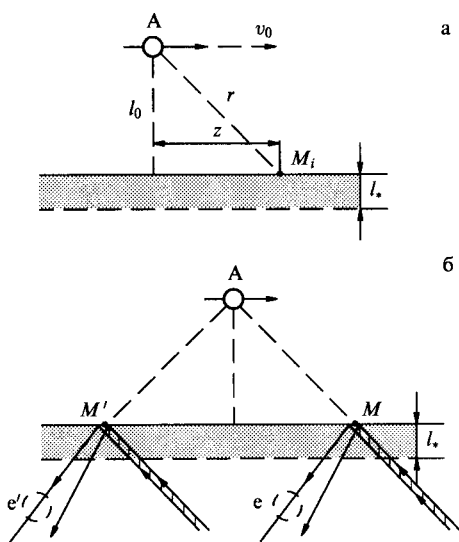


Рис. 20. а — Атом с дипольным моментом  $d$  пролетает над металлической поверхностью на расстоянии  $l_0$  со скоростью  $v_0$ . Слой взаимодействия электронов проводимости имеет толщину  $l_s$ ; б — в системе координат, где атом неподвижен, электроны  $e'$ ,  $e$  подлетают под углом к поверхности металла и затем, отражаясь от нее, уходят в толщу металла.

$d \cong 3a_0e$ , где  $a_0$  — боровский радиус,  $e$  — заряд электрона. Можно сказать, что такой атом взаимодействует с электроном проводимости номера  $i$  в точке  $M_i$  (рис. 20а) по закону Кулона с потенциалом  $U_i = ed(x - x')/r^3$ . Это взаимодействие очень мало. Оно никак не может нарушить когерентность волновой функции электрона атома, но может несколько сдвинуть фазы S- и P-амплитуд. Этому процессу соответствует рождение небольшой добавки P-состояния из исходного S-состояния недиагональным матричным элементом взаимодействия. Наша задача состоит в оценке этой добавки, рождаемой всеми электронами проводимости.

Пусть  $n$  — плотность свободных электронов проводимости. По порядку величины она равна  $n \cong n_0 T/\varepsilon_F$ , где  $T$  — температура (в энергетических единицах),  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми,  $n_0$  — плотность электронов зоны проводимости. Введем, далее, обозначение  $l_* = n_0^{-1/3}$  для среднего расстояния между электронами зоны проводимости.

Взаимодействие атома с каждым электроном проводимости формально дается величиной  $U_i$ , но суммарное взаимодействие всех электронов с атомом не равно сумме  $U_i$ : оно сильно подавлено из-за наличия ионного остова и корреляции электронов между собой. Основная корреляция, которую можно назвать локальной квазинейтральностью, возникает в толще металла. А именно, каждый заряд, в том числе заряд каждого электрона, оказывается окруженным оболочкой противоположного заряда. В плазме, т.е. в системе заряженных классических частиц, характерная длина экранирования заряда равна дебаевскому радиусу. А в металлах эта длина приблизительно равна среднему расстоянию  $l_*$  между электронами проводимости. Поэтому можно считать, что с атомом реально взаимодействуют лишь те электроны, которые находятся в поверхностном слое толщиной  $l_*$ .

Каждый электрон, выходящий из металла к его границе и затем после отражения уходящий внутрь, проводит в таком слое долю времени  $\Delta t = l_*/v_F$ . Таким образом, через интервал  $\Delta t$  происходит как бы замена всех поверхностных электронов на новые, приходящие из толщи металла.

Рассмотрим теперь один из электронов из поверхностного слоя толщиной  $l_*$ . Если бы этот электрон был один, то за время  $\Delta t$  он привел бы к набегу  $\Delta a_P$ , амплитуды 2P-состояния (в предположении, что амплитуда 2S-состояния близка к единице), равному по порядку величины  $\Delta a_P \cong U_i \Delta t/\hbar$ . Однако суммарный набег амплитуды  $\Delta a_P$  вовсе не равен сумме случайных величин  $\Delta a_{P_i}$ . Дело в том, что вклады  $\Delta a_{P_i}$  скоррелированы между собой таким образом, что сумма амплитуд практически равна нулю. Это условие можно назвать внешней



квазинейтральностью: движение электронов в поверхностном слое слабо возмущается таким образом, чтобы суммарное электрическое поле вне металла было мало, т.е. не превосходило бы теплового шума величиной  $E \sim T^{1/2} \Gamma_0^{3/2}$ . Таким образом, эффект суммарного набега амплитуды  $\Delta a_p$ , казалось бы, навсегда исключен. Однако это не совсем так.

Дело в том, что взаимодействие электронов проводимости с атомом должно рассматриваться как единый квантовый процесс, так что набег фазы  $\Delta a_p$  относится не только к атому, но и к электрону проводимости с номером  $i$ . После взаимодействия этот электрон улетает в глубь металла, а там из-за разрушения когерентности происходит коллапс его волновой функции, так что из широкого волнового пакета отраженной от поверхности волны после коллапса  $\psi$ -функции выделяется только небольшая доля волнового пакета. Можно сказать, что каждое чистое состояние волнового пакета превращается в смешанное, но тогда и в фазе  $\Delta a_p$  может появиться несиловая добавка. Этот эффект похож на измерение одной из корреляционных пар частиц в парадоксе Эйнштейна – Подольского – Розена: коллапс волновой функции одной из частиц, уже переставших взаимодействовать между собой, приводит к изменению волновой функции скоррелированной с ней частицы. Эффект ЭПР является не силовым, а корреляционным, типа, например, принципа Паули. Поэтому корреляционные сдвиги фазы не подчиняются правилу квазинейтральности и равенству нулю суммы набега фаз: они обусловлены не только средним электрическим полем на атоме, но и процессами в толще металла.

Постараемся теперь оценить этот эффект по порядку величины. Для этого перейдем в систему координат, движущуюся вместе с атомом (рис. 20б). В этой системе координат электроны металла движутся по отношению к атому так, что они подлетают к границе и отражаются от нее под косым углом к поверхности (рис. 20б).

Рассмотрим два электрона  $e'$ ,  $e$ , которые отражаются от границы металла в точно симметричных точках  $M'$ ,  $M$  в одно и то же время. Макроскопическое электрическое поле от таких электронов в точности равно нулю просто в силу симметрии. Нетрудно видеть, что в среднем все взаимодействующие с атомом электроны можно разбить на такие симметричные пары, так что в пренебрежении тепловыми флуктуациями макроскопическое взаимодействие электронов проводимости с атомом в среднем отсутствует. Но рассмотрим более подробно, что происходит с каждым отдельным электроном после отражения от границы металла (рис. 21).

Пусть волновая функция электрона  $e$  выглядит как небольшой волновой пакет, который падает на границу металла, отражается от нее и уходит затем в глубь металла.

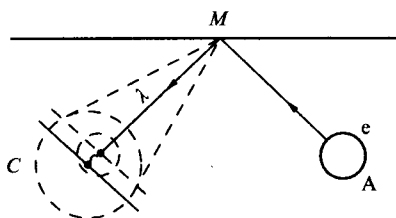


Рис. 21. Волновой пакет электрона  $e$  отражается от границы металла и, расплываясь, уходит в толщу металла. Где-то в области  $C$  происходит коллапс волновой функции из-за рассеяния на примесях, неоднородностях или на других электронах. Корреляция от этого коллапса передается в точку  $M$  и на атом  $A$ .

Пусть размер пакета имеет порядок величины  $b$ . Тогда волновую функцию электрона сразу после отражения можно аппроксимировать выражением (139), где ось  $x$  направлена вдоль движения пакета, а волновое число  $k = u/\hbar m$ , где  $u$  — компонента скорости электрона вдоль оси  $x$ . По порядку величины  $u \cong v_F$ . По мере удаления от точки

$M$  волновая функция свободного электрона эволюционирует в соответствии с соотношениями (140)–(142), т.е. волновой пакет расплывается. Однако на длине свободного пробега  $\lambda$ , т.е. в точке  $C$  на рис. 21, волновой пакет из-за рассеяния на других электронах настолько "растрепывается", что его отдельные части перестают быть когерентными между собой. В этих условиях исходный пакет распадается на несколько частей, а электрон остается только в одной из таких частей. Другими словами, происходит коллапс волновой функции до размеров порядка  $b$ , а остальные части пакета уничтожаются.

Коллапсы волновых функций в среднем не должны менять энергии электронов. Но если широкий волновой пакет коллапсирует в компактный пакет размером " $b$ ", то просто в силу соотношения неопределенностей его энергия должна возрасти на величину

$$\frac{3}{2m} \left( \frac{\hbar}{b} \right)^2.$$

Чтобы энергия частицы в среднем не изменилась, ее скорость должна уменьшиться на величину  $\Delta u$ , так что

$$m u \Delta u = \frac{3}{2m} \left( \frac{\hbar}{b} \right)^2.$$

Малая величина  $\Delta u$  создается не самим взаимодействием, а более вероятным коллапсом в медленную часть пакета. Напомним, что

согласно соотношению (60) волновой пакет организован таким образом, что его "носковая" часть имеет несколько большую скорость по сравнению с "хвостовой" частью. Неопределенность локальных скоростей вдоль пакета имеет порядок величины  $\Delta v = \hbar/mb$ . Поэтому отношение  $\alpha = \Delta u/\Delta v$  можно рассматривать как параметр асимметрии коллапса, относящейся либо к скоростям, либо к положению коллапса по отношению к центру пакета. При  $\alpha \neq 0$  коллапсы в среднем "вырезают" из волновых пакетов электронов их медленную часть, так что в среднем волновые пакеты после коллапсирования оказываются сдвинутыми в сторону "хвоста" на малую величину  $\sim \alpha b$ . Соответственно, и у волновой функции атома произойдет такое изменение, которое отвечает более длительному взаимодействию атом-электрон.

Вернемся к рис. 20б. Мы видим, что асимметрия соответствует как бы эффективной задержке отраженного пакета на долю времени  $\Delta t = \alpha b/v_F$ . Из рисунка 20б видно, что при отражении в точках  $M'$ ,  $M$  волновые пакеты становятся не вполне симметричными относительно атома. А именно, сдвигаясь на величину  $\Delta x = v_0 \Delta t$ , пакет  $M'$  оказывается несколько дальше от атома, чем пакет  $M$ . Другими словами, в точке  $M'$  как бы появляется некоторый эффективный заряд, а в точке  $M$  — равный ему по абсолютной величине заряд противоположного знака.

Учтем теперь, что в слое взаимодействия толщиной  $l_* = n_0^{-1/3}$  на один квадратный сантиметр поверхности приходится  $nn_0^{-1/3}$  свободных электронов проводимости,  $n = n_0 T/\varepsilon_F$ . Малая доля  $\sim \Delta x/l_0$  этих электронов создает эффективный корреляционный "заряд", образованный за счет коллапсирования в хвост волновых пакетов. По порядку величины получаем

$$\sigma_* \sim \frac{\alpha e v_0 b n_0^{2/3} T}{l_0 v_F \varepsilon_F}. \quad (259)$$

Здесь параметр асимметрии  $\alpha$  имеет порядок величины  $\alpha = \Delta u/\Delta v \sim \hbar/mbv_F$ . При пролете возбужденного атома на расстоянии  $\sim l_0$  от образца конечных размеров во взаимодействие вовлекается "заряд" порядка  $q_* \sim \sigma_* l_0^2$ , который создает корреляционное "электрическое поле"  $E_* \sim q_*/l_0^2 \sim \sigma_*$ . Время взаимодействия атома с образцом составляет величину порядка  $l_0/v_0$ , и поэтому набег амплитуды  $\Delta a_p$  для образца конечного размера имеет порядок величины

$$\Delta a_p \sim \frac{3a_0 e E_* l_0}{\hbar v_0} \sim \frac{3e^2 a_0 n_0^{2/3} T}{m v_F^2 \varepsilon_F}. \quad (260)$$

Подставляя сюда величину  $a_0 = \hbar^2/me^2$  для боровского радиуса и учитывая, что в модели идеального электронного газа импульс Ферми  $p_F$  равен величине  $p_F = mv_F = \hbar(3\pi^2 n_0)^{1/3}$ , получаем простую оценку:

$$\Delta a_p \sim \frac{1}{3} \frac{T}{\varepsilon_F}.$$

Эксперимент дает величину  $\Delta a_p \sim 10^{-2}$  при  $T/\varepsilon_F \sim 10^{-2}$ , так что согласование теоретической оценки с экспериментом следует считать вполне удовлетворительным. Оценка (260) получена нами в предположении, что расстояние пучка от образца  $l_0$  настолько мало, что можно не учитывать распадов 2P-состояний во время взаимодействия атом — металл. Более точный учет геометрии эксперимента приведен в разделе 42.

Можно сказать, что результативно на атом действует некоторое эффективное поле  $E_*$ . Однако поле  $E_*$  — это не настоящее электрическое поле: его нельзя измерить макроскопическим прибором. "Поле Демона" — это, вероятно, наиболее подходящее название для  $E_*$ . Эффективное поле  $E_*$  "действует" только на пролетающий возбужденный атом. Более всего  $E_*$  похоже на действующее поле в диэлектриках, когда эффективное поле, действующее на каждый конкретный микро-диполь, отличается от среднего поля  $E$  в среде вследствие взаимной корреляции взаимодействующих диполей.

В нашем случае поле  $E_* \neq E \approx 0$  появляется из-за корреляции в эволюции волновой функции атома и коллапсирующих волновых функций электронов проводимости. Мы встречаемся здесь с эффектом типа ЭПР-корреляции, но не в варианте одиночных ЭПР-пар, а в условиях, когда атом является одним единственным первичным партнером при взаимодействии с огромным числом вторичных партнеров — электронов проводимости. После взаимодействия с атомом в слое проводимости электроны улетают в глубь металла, чтобы там в процессе коллапсов породить корреляционные отклики. Из-за небольшой асимметрии коллапсов корреляционные отклики накапливаются у атома в виде сдвига амплитуды  $\Delta a_p$ . В конечном счете именно коллапсы приводят к дипольной деформации атома и к постепенному появлению 2P-амплитуды из исходной 2S-амплитуды. Эффект Соколова — это совершенно новый тип необратимого взаимодействия в микромире. Он основан на понятных в принципе микропроцессах, но в варианте тонких корреляций ЭПР-пар он наблюдался первый раз. Более точная теория этого эффекта изложена в следующем разделе.

## 42. Теория эффекта Соколова

Попытаемся теперь более точно описать эффект Соколова как результат взаимодействия возбужденного атома водорода с электронами проводимости металла, предполагая, что электроны находятся в состоянии квантового хаоса. Поскольку рассматриваемый эффект представляет собой результат довольно сложного механизма взаимодействия очень многих частиц, при описании кинетики электронов проводимости будет принята простейшая газовая модель.

В приближении газовой модели ферми-жидкость электронов проводимости можно рассматривать как газ квазичастиц — электронов и дырок. Обозначим через  $\varepsilon_F$  энергию Ферми (точнее, это химический потенциал). Тогда плотность свободных носителей заряда можно принять равной  $n = n_0 T / \varepsilon_F$ , где  $n_0$  — плотность электронов зоны проводимости,  $T$  — температура, выраженная в энергетических единицах. Приближенно будем считать, что при  $\varepsilon > \varepsilon_F$  мы имеем дело со свободными электронами с равновесным распределением

$$f_- = \frac{n_0}{\varepsilon_F} \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{T}\right),$$

а при  $\varepsilon < \varepsilon_F$  носители заряда представляют собой дырки с распределением

$$f_+ = \frac{n_0}{\varepsilon_F} \exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{T}\right).$$

Для удобства будем считать  $\varepsilon - \varepsilon_F = \varepsilon_-$  при  $\varepsilon > \varepsilon_F$  и  $\varepsilon_F - \varepsilon = \varepsilon_+$  при  $\varepsilon < \varepsilon_F$ , так что  $\varepsilon_-$ ,  $\varepsilon_+$  являются положительными величинами. Поверхность Ферми считается при этом сферической.

Обозначим через  $p_F$  импульс Ферми, а через  $v_F$  скорость Ферми, которую будем считать равной  $v_F = p_F / m$ , где эффективную массу  $m$  будем считать равной массе свободного электрона. Для электронов и дырок примем простейшие зависимости их энергии от импульса:

$$\varepsilon_- = v_F(\mathbf{p} - \mathbf{p}_F) + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_F)^2}{2m} \quad (261)$$

$$\varepsilon_+ = v_F(\mathbf{p}_F - \mathbf{p}) - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_F)^2}{2m}.$$

Рассмотрим сначала случай достаточно низких температур, когда фононов мало, и поэтому можно пренебречь электрон-фононными взаимодействиями. По аналогии с разреженным газом можно считать, что рассеяние электронов и дырок друг на друге должно приводить к

тому, что их волновые функции приобретают вид волновых пакетов. Постараемся найти их форму.

Рассмотрим некоторый пробный электрон, движущийся вдоль оси  $x$  с импульсом  $p$  (здесь локальную ось координат  $x$  не следует путать с координатой  $x$  на рис. 20). Его волновую функцию можно представить в виде

$$\exp\left(-i\omega t + \frac{ip_F x}{\hbar}\right)\psi(\mathbf{r}, t),$$

где  $\psi(\mathbf{r}, t)$  представляет собой огибающую волнового пакета, включающую в себя медленную зависимость вида  $\exp[i(p_x - p_F)/\hbar]$ . Согласно (261) для волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$  пробной частицы можно составить уравнение Шрёдингера свободного движения

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar v_F \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi. \quad (262)$$

Это уравнение составлено с помощью первого соотношения (261) путем замены  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_F$  на оператор  $-i\hbar \nabla$  и выбором частоты  $\omega$ , равной  $\varepsilon_-/\hbar$ . Согласно уравнению (262) волновой пакет перемещается со скоростью  $v_F$  вдоль оси  $x$  и расплывается равномерно по всем трем направлениям.

Учтем теперь столкновения между электронами (и дырками). В уравнении (262) эффект столкновений можно учесть дополнительным слагаемым  $-i\hbar v\psi/2$  в правой части. Здесь  $v$  — частота столкновений, равная  $v = 1/\tau$ ,  $\tau$  — среднее время столкновений. Электрические поля электронов и дырок в металле заэкранированы на расстояниях  $\sim n_0^{-1/3}$ . Поэтому сечение рассеяния имеет порядок величины  $n_0^{-2/3}$  (на расстояниях, меньших  $n_0^{-1/3}$ , носители заряда сильно взаимодействуют между собой). Из-за принципа Паули взаимодействие электронов и дырок сильно подавлено, так что частота столкновений в среднем имеет порядок величины  $v_F n_0^{1/3} T^2 \varepsilon_F^{-2}$  (см., например, [87]).

Допустим, что в некоторый начальный момент времени  $t = 0$  волновая функция электрона выглядит как волновой пакет

$$\psi(\mathbf{r}) = (\pi b^2)^{-3/4} \exp\left(ikx - \frac{\mathbf{r}^2}{2b^2}\right), \quad (263)$$

где параметр  $b$  определяет ширину волнового пакета с центром в точке  $\mathbf{r} = 0$ ;  $k = (p - p_x)/\hbar$  — волновой вектор "наполнения пакета". Предположим, что параметр  $b$  является действительным числом. В

последующие моменты времени волновая функция имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{b^2}{\pi}\right)^{3/4} \frac{1}{A^3} \exp\left[-i\omega t - \frac{\nu}{2} t + ikx - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{2A^2}\right], \quad (264)$$

где  $A^2 = b^2 + i\hbar t/m$ ,  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{v}^0 t$ ,  $|\mathbf{v}_0| \cong v_F$ .

Как мы видим, волновая функция со временем расплывается в пространстве и затухает из-за рассеяний на свободных электронах и дырках. Как было аргументировано на примере обычного газа, затухание волновой функции вида (264) по закону  $|\psi|^2 \sim \exp(-\nu t)$  соответствует уменьшению вероятности существования исходного пакета и сопровождается внезапным возникновением нового пакета с вероятностью  $dt/\tau$  за время  $dt$ . Происходит коллапс волновой функции с уничтожением прежнего волнового пакета и рождением нового пакета. Коллапсы происходят случайно и распределены по закону Пуассона. Размеры волновых пакетов поддерживаются самими рассеяниями, так что  $b^2 = \hbar\tau/m$ , а среднее значение  $\langle |A|^4 \rangle \cong b^4 + \hbar^2\tau^2/m^2$ . Как мы видим, размеры волнового пакета слегка пульсируют от коллапса к коллапсу:  $|A|^2 = b^2$  при рождении пакета и  $|A|^2 \cong \sqrt{2}b^2$  перед следующим рассеянием, сопровождаемым повторным коллапсом. Если частота столкновений  $\nu$  зависит от скорости частицы, то возникают дополнительные особенности в поведении волнового пакета. А именно, если волновой пакет распространяется со скоростью  $v_0$  вдоль оси  $x$ , то частоту столкновений  $\nu(v)$  можно приближенно представить в виде  $\nu(v_0) + \nu'(v - v_0)$ , где  $\nu' = (d\nu/dv)_{v_0}$ . Член  $\nu'v$  приводит к затуханию волнового пакета вида  $\exp(-\nu'x/2)$ . Поэтому огибающая волнового пакета (без учета нормировки) выглядит как

$$\psi = \exp\left(-\frac{\nu t}{2} + ikx - \frac{x'^2}{2A^2} - \frac{\nu'x'}{2}\right), \quad (265)$$

где  $x' = x - v_0 t$ ,  $\nu = \nu(v_0)$ ,  $\nu' = (d\nu/dv)_{v_0}$ . Последний член под экспонентой уменьшает амплитуду пакета при  $x' > 0$  и увеличивает амплитуду при  $x' < 0$  (если  $\nu' > 0$ ). Так как ширина пакета со временем возрастает, то член с  $\nu' > 0$  приводит к уменьшению средней скорости пакета со временем. Можно сказать, что "носковая" часть пакета быстрее вымывается столкновениями, так что пакет в среднем замедляется. С помощью волновой функции (265) нетрудно установить, что энергия волнового пакета уменьшается со временем по закону

$$\Delta\epsilon_- = -\frac{\hbar\nu_0\nu't}{2\tau}. \quad (266)$$

Величина  $\tau$  связана со средней шириной волнового пакета при его рождении соотношением  $\tau = mb^2/\hbar$ .

В среднем по всем электронам энергия должна сохраняться, поэтому уменьшение энергии (266) каждого из пакетов должно чем-то компенсироваться. Как аргументировано в разделе 40, такая компенсация осуществляется за счет несимметрии повторных коллапсов. Симметричные повторные коллапсы сами по себе должны были бы приводить к возрастанию энергии пакета при каждом коллапсе, равному  $\Delta\varepsilon_- = 3\hbar/2\tau$ . Несимметрия коллапсов должна скомпенсировать и этот эффект. В результате, согласно (257) получается приближенное соотношение (при  $t^2 \gg \tau^2$ ) для асимметрии коллапсов:

$$\langle x'_0 \rangle_- = -\frac{3}{4} \frac{\hbar}{mv_F} \frac{t}{\tau} + \frac{\hbar \langle v' \rangle}{2m} \frac{t^2}{\tau}. \quad (267)$$

Среднее значение  $\langle x'_0 \rangle_-$  показывает, насколько отличается закон распределения коллапсов с фактором  $\exp[-(x' - x'_0)^2/2b^2]$  от симметричного распределения коллапсов с вероятностью  $|\psi(x'_0)|^2 = \exp[-x_0'^2 b^2/|A|^4]$ . Первое слагаемое в (267) указывает на превалирование коллапсов в "хвостовую" часть пакета, а второе слагаемое — на повышенную вероятность коллапсов в "носовую" часть пакета. Согласно гипотезе работы [86], именно несимметрия  $\langle x'_0 \rangle \neq 0$  должна приводить к эффекту Соколова. Выражение (267) получено в приближении  $t^2 \gg \tau^2$ , но им можно пользоваться и при  $t \sim \tau$  как разумной интерполяцией, поскольку  $\langle x'_0 \rangle = 0$  при  $t = 0$ , т.е. в момент рождения начального пакета.

Если считать, что сечение рассеяния электронов на электронах и на дырках слабо зависит от их энергии, то зависимость частоты столкновений от скорости определяется множителем  $(p - p_F)^2$  при вероятности рассеяния. Этот множитель возникает из-за учета принципа Паули (см., например, [87]). Поэтому величину  $\langle v' \rangle_-$  можно оценить как

$$\langle v' \rangle_- \cong \frac{\varepsilon_F}{\tau v_F T}. \quad (268)$$

При  $T \ll \varepsilon_F$  и  $t \sim \tau$  второе слагаемое в правой части соотношения (267) оказывается значительно больше первого слагаемого. Оба они пропорциональны величине  $\hbar/mv_F$ , т.е. постоянной решетки.

Выражение (267) получено для электронов. Рассмотрим теперь, что происходит с дырками. Согласно (261) энергия дырки  $\varepsilon_+$  отсчитывается от энергии Ферми  $\varepsilon_F$ . Поскольку у дырки  $p < p_F$ , первое слагаемое в выражении (261) для  $\varepsilon_+$  положительно. Второе малое



слагаемое отрицательно, что соответствует как бы отрицательной массе дырки.

Величина  $\varepsilon_+$  означает ту энергию, на которую должна увеличиться энергия системы электронов при удалении электрона и появлении дырки. Величина  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  обозначает импульс электрона на уровне  $\mathbf{k}$ , так что при создании дырки на этом уровне импульс системы электронов изменяется на величину  $\mathbf{p}_F - \mathbf{p}$ . Если считать, что волновая функция дырки имеет вид

$$\exp\left[-\frac{i\varepsilon_+ t}{\hbar} - \frac{i(p_x - p_F)x}{\hbar}\right]\psi_+(\mathbf{r}, t),$$

то во втором соотношении (261)  $\varepsilon_+$  следует заменить на  $i\hbar\partial/\partial t$ , а выражение  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_F$  на  $i\hbar\nabla$ . Поэтому уравнение Шрёдингера для волновой функции дырки  $\psi_+$  должно отличаться от аналогичного уравнения (262) для электрона заменой  $m$  на  $-m$  в последнем слагаемом справа.

Поскольку масса дырки отрицательна, а заряд положителен, дырка в квазиклассическом приближении ведет себя как электрон. Однако знак дисперсии меняется, и поэтому в соотношении вида (264) для  $\psi_+$  величину  $A^2$  следует заменить на комплексную сопряженную. Соответственно, волновой пакет дырки имеет более коротковолновое накопление в "хвостовой", а не в "носовой" части. Энергия  $\varepsilon_+$  при коллапсе дырки не увеличивается, а уменьшается, поэтому первое слагаемое в правой части соотношения (267) в случае дырки меняет знак. При переходе к дырке величина  $(v')_+$  меняет знак, поскольку частота столкновений опять пропорциональна  $(p - p_F)^2$ , но  $p < p_F$ , так что  $v' < 0$ . Таким образом, имеем приближенно для дырок и электронов:

$$\langle x'_0 \rangle_{\pm} \cong \pm \frac{3\hbar}{4mv_F} \frac{t}{\tau} + \frac{\hbar\varepsilon_F}{2mv_F T} \frac{t^2}{\tau^2}. \quad (269)$$

При  $t \sim \tau$  величина асимметрии мала, но она оказывается вполне достаточной для объяснения экспериментально наблюдаемого эффекта Соколова.

Рассмотрим взаимодействие возбужденного атома водорода с электронами проводимости металла. Допустим, что возбужденный атом водорода со скоростью  $v_0$  пролетает параллельно плоской поверхности металла на расстоянии  $l_0$  от этой плоскости. Пусть  $d$  есть дипольный момент для P-S-перехода при продольной поляризации 2P-атома. Энергия взаимодействия атома с электроном номера  $j$ ,

находящимся вблизи точки  $M$  поверхности металла (см. рис. 20), равна

$$U_j = -dE_{jx} = \frac{de(x - x')}{r^3}, \quad (270)$$

где  $r$  — расстояние между атомом и электроном,  $x, x'$  — продольные координаты атома и электрона. Естественно считать, что электрон взаимодействует с атомом только в тонком слое толщиной  $l_* \cong n_0^{-1/3}$ , поскольку внутри металла все заряды экранируются на расстояниях порядка  $n_0^{-1/3}$ . Среднюю скорость электронов по нормали к поверхности можно считать равной  $\langle v_z \rangle = 2v_F/\pi$ . Волновой пакет электрона слой за слоем пересекает слой взаимодействия толщиной  $l_*$  и, отражаясь от поверхности металла, улетает внутрь металлического образца. Время, за которое один слой замещается на другой, равно  $\Delta t = 2l_*/\langle v_z \rangle = \pi l_*/v_F$ . За это время амплитуда 2P-атома изменяется из-за взаимодействия с  $j$ -электроном на величину

$$\Delta a_{Pj} = \frac{U_j \Delta t}{\hbar}, \quad (271)$$

если допустить, что амплитуда 2S-атома близка к единице.

За время  $\Delta t$  атом смещается на расстояние  $\Delta x = v_0 \Delta t$ , так что энергия взаимодействия изменяется за это время на величину

$$\Delta U_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} \Delta x = de \frac{r^2 - 3(x - x')^2}{r^5} v_0 \Delta t. \quad (272)$$

Это различие во взаимодействии относится ко всем соседним слоям волнового пакета толщиной  $2l_*$ , если положить  $\Delta t = \pi l_*/v_F$ . Соответственно, величины  $\Delta a_{Pj}$  оказываются разными для разных слоев волнового пакета. Другими словами, изменение амплитуды  $\Delta a_{Pj}$  является функцией координаты электрона вдоль волнового пакета. Это означает, что совместная волновая функция атома и электрона не может быть представлена в виде простого произведения их волновых функций. Такие нефакторизуемые состояния называются "запутанными состояниями". Типичный пример запутанного состояния был рассмотрен Эйнштейном, Подольским и Розеном в их знаменитом парадоксе [8]. Можно сказать, что движущийся возбужденный атом образует с электронами металла ЭПР-пары коррелированных частиц. Нам следует рассмотреть дальнейшую эволюцию этих пар.

Каждый электрон в металле расталкивает другие электроны, так что около него образуется положительно заряженная сфера радиуса  $l_* = n_0^{-1/3}$ . Такая экранировка сохраняется и в том случае, если электрон попадает в поверхностный слой взаимодействия толщиной

*l.* Соответственно, макроскопическое поле на атоме, равное усредненному его значению от суммы всех электронных микрополей, обращается в нуль, если пренебречь случайными тепловыми флуктуациями.

Усреднение производится с весом  $|\psi|^2$ , где  $\psi$  — волновая функция всех электронов. Если дальнейшая эволюция системы происходит таким образом, что вероятности переходов точно следуют закону  $p \sim |\psi|^2$ , то электрическое поле на атоме будет тождественно равно нулю и в последующие времена. Но в реальной системе электронов все оказывается сложнее. Как показано выше, коллапсы индивидуальных электронов и дырок происходят таким образом, что среднее значение продольной координаты любого волнового пакета, отсчитываемое от средней координаты перед коллапсом, отлично от нуля и составляет величину (269). Так как электронная волновая функция может образовывать с атомом запутанное состояние, то ее коллапс с  $\langle x'_0 \rangle \neq 0$  должен менять амплитуду атома  $a_{2p}$ . Что касается тех скоррелированных электронов, которые создавали экранировку заряда во время взаимодействия, то можно предположить, что будучи организованными по закону  $p \sim |\psi|^2$  во время взаимодействия электрона с атомом, они не смогут в дальнейшем создавать более тонкие корреляционные связи с возбужденным атомом. Поэтому они вычтут вклад, пропорциональный  $\langle |\psi|^2 \rangle$  от пробной частицы и оставят только чистый эффект от асимметрии коллапса (269). Это значит, что в выражении (272) для энергии взаимодействия одиночного электрона с атомом величину  $\Delta t$  нужно заменить на  $-\langle \Delta x'_0 \rangle_- / v_F$ . Чтобы учесть вклад от всех электронов, участвующих во взаимодействии, нужно умножить величину  $\Delta U_j$  на число электронов в слое взаимодействия,  $n_- l_* dx' dy'$ , заменить  $\langle \Delta x'_0 \rangle_-$  на его усредненное значение  $\langle \overline{\Delta x'_0} \rangle$  и проинтегрировать результат по  $x', y'$ . К полученному результату нужно добавить вклад от дырок, с заменой  $-\langle \Delta x'_0 \rangle_-$  на  $+\langle \Delta x'_0 \rangle_+$ . В результате получаем полную энергию взаимодействия  $U$ , которую мы представим в виде  $U = -dE_*$ . Здесь  $d$  — атомный дипольный момент 2S–2P-перехода, а  $E_*$  означает вспомогательное корреляционное электрическое поле:

$$E_* = -\Phi_* \frac{\partial}{\partial x} \iint \frac{x - x'}{r^3} dx' dy'. \quad (273)$$

Здесь  $r^2 = (x - x')^2 + y'^2 + l_0^2$  — квадрат расстояния от атома до электрона в слое взаимодействия, а фактор  $\Phi_*$  с учетом приближенных соотношений  $l_* = n_0^{-1/3}$ ,  $n_+ = n_- = n_0 T / \epsilon_F$  равен

$$\Phi_* = -\frac{ev_0 n_0^{2/3} T}{v_F \epsilon_F} \left\{ \langle \overline{\Delta x'_0} \rangle_- - \langle \overline{\Delta x'_0} \rangle_+ \right\}. \quad (274)$$

Чтобы вычислить средние значения  $\langle \overline{\Delta x'_0} \rangle_{\pm}$ , нужно учесть, что в выражениях (269) время  $t$  отсчитывается от момента начального коллапса. Допустим, что электрон пролетает слой взаимодействия при  $t = t_0$ . Нам нужны лишь те значения  $\langle \Delta x'_0 \rangle_{\pm}$ , которые накапливаются после  $t = t_0$ , поэтому при вычислении необходимых нам значений  $\langle \overline{\Delta x'_0} \rangle_{\pm}$  величины  $t$ ,  $t^2$  следует заменить соответственно на  $t - t_0$ ,  $t^2 - t_0^2$ . Вероятность того, что электронный пакет, родившийся при  $t = 0$ , доживет до  $t = t_0$ , равна  $\exp(-t_0/\tau)$ , а вероятность выживания пакета в течение времени  $t - t_0$  после акта взаимодействия равна  $\exp[-(t - t_0)/\tau]$ . Если умножить величины  $t - t_0$ ,  $t^2 - t_0^2$  на  $\exp[-(t - t_0)/\tau] dt/\tau$  и проинтегрировать от  $t - t_0 = 0$  до  $t - t_0 = \infty$ , то мы получим некоторое среднее значение с весом  $\exp(-t_0/\tau)$ . Усреднение его по  $t_0$  с дополнительным весом  $\exp(-t_0/\tau)$  заменяет  $t_0$  на  $\tau/2$ . Таким образом, получаем

$$\langle \Delta x'_0 \rangle_{\pm} = \pm \frac{3\hbar}{4mv_F} + \frac{3\hbar\varepsilon_F}{4mv_FT}. \quad (275)$$

Полученные выражения следует подставить в соотношение (274). При этом первые слагаемые в (275) для электронов и дырок суммируются, а вторые слагаемые практически компенсируют друг друга. Но если учесть, что у дырок скорость меньше скорости электронов на малую величину порядка  $T/\varepsilon_F$ , то от второго слагаемого в (275) возникнет малая добавка  $\sim T/\varepsilon_F$ . Учитывая этот факт и хорошо известное соотношение  $p_F = mv_F = \hbar(3\pi^2n_0)^{1/3}$ , получаем приближенное значение  $\Phi_*$  в модели свободного ферми-газа:

$$\Phi_* = A_0 \frac{emv_0}{\hbar} \frac{T}{\varepsilon_F}. \quad (276)$$

Здесь числовой множитель  $A_0$  приближенно равен  $A_0 \cong 0,16$ . Специально проведенные эксперименты (см. [88] и следующий раздел) по определению величины и знака эффекта Соколова дают экспериментальное значение  $A_0 \cong 0,1$ . Если учесть, что теория построена на достаточно грубых оценках, то согласие теории и эксперимента следует считать вполне удовлетворительным. Заметим, что все характеристики металла содержатся только в  $\varepsilon_F$  и в коэффициенте  $A_0$ .

Выражение (276) получено нами с помощью усреднения эффекта по  $t - t_0$  и  $t_0$ . Если усреднение провести только по  $t_0$ , то можно найти явную зависимость фактора  $\Phi_*$  от времени  $t - t_0$ , протекшего после взаимодействия атома с металлом. Эта зависимость дается фактором

$A_0(t - t_0)$ :

$$A(t - t_0) = A_0 \frac{(t - t_0)(t - t_0 + \tau)}{3\tau^3} \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right). \quad (277)$$

Интеграл от этого выражения по времени  $t$  дает просто  $A_0$ . Как видно из (277), эффективное поле  $E_*$  действует на атом с отставанием по времени порядка  $\tau$ , по сравнению с временем реального взаимодействия атома с электронами проводимости металла.

Все выше приведенные выкладки были проведены без учета фононов. При не очень низких температурах следует учитывать взаимодействие электронов с фононами. Это взаимодействие соответствует испусканию и поглощению фононов (электронами). Если температура заметно ниже дебаевской (температуры, равной энергии фонона  $\hbar\omega_D$  с максимальной частотой  $\omega_D$ ), то наибольшую роль играют процессы с испусканием и поглощением фононов с энергией  $\hbar\omega \sim T$  (см. [87]). При каждом таком элементарном акте электрон рассеивается на малый угол  $\theta$ , равный по порядку величины отношению импульса фонона к импульсу электрона, т.е.  $\theta \sim \hbar k/p_F \sim \sim T/\hbar\omega_D \ll 1$  (средний импульс фонона равен  $\hbar\omega/c_s \sim T/c_s \sim T/(\hbar\omega_D) \cdot p_F$ ). Испускание или поглощение фонона производится всем волновым пакетом электрона, и никакого дополнительного коллапсирования электронной волновой функции при этом не происходит (каждый акт взаимодействия просто изменяет импульс электрона). Сами фононы при этом выглядят как волновые пакеты с широкой областью локализации. Для их описания вполне оправданно приближение плоских волн.

Среднее время  $\tau_{cp}$  между последовательными рассеяниями электрона на фононах составляет величину  $\tau_{cp} \sim \hbar^3 \omega_D^2 / T^3$  при  $T < \hbar\omega_D$  и  $\tau_{cp} \sim \hbar/T$  при  $T \gtrsim \hbar\omega_D$ . Для нас более важным является время рассеяния на угол  $\sim 1$ , равное  $\tau_e \sim \tau_{cp}/\theta^2$ . Это время составляет величину  $\tau_e \sim \hbar^5 \omega_D^4 / T^5$  при  $T < \hbar\omega_D$  и  $\tau_e \sim \hbar/T$  при  $T \gtrsim \hbar\omega_D$ . Время  $\tau_e$  удобно сравнить с временем электрон-электронных столкновений  $\tau \sim \hbar\varepsilon_F / T^2$ . Как мы видим,  $\tau_e \sim \tau T / \varepsilon_F$  при  $T \gtrsim \hbar\omega_D$ , а при понижении температуры  $\tau_e$  возрастает, так что  $\tau_e / \tau \sim \hbar^4 \omega_D^4 / \varepsilon_F T^3$  при  $T < \hbar\omega_D$ . Как мы видим,  $\tau_e$  обычно значительно меньше  $\tau$  и только при достаточно низких температурах,  $T/\hbar\omega_D < (\hbar\omega_D/\varepsilon_F)^{1/3}$ , рассеяние на фононах перестает играть роль. Так как  $\hbar\omega_D \sim c_s p_F \sim c_s \varepsilon_F / v_F$ , то рассеянием на фононах можно пренебречь только при  $T/\hbar\omega_D < (c_s/v_F)^{1/3} \sim (m/M)^{1/6}$ , где  $M$  — масса иона.

С учетом рассеяний на фононах волновые пакеты электронов и дырок движутся по ломаным траекториям с изменением направления движения  $\sim T/\hbar\omega_D$  при каждом акте испускания или поглощения

фонона. При  $T \ll \hbar\omega_D$  угол рассеяния мал, а при увеличении температуры до дебаевской температуры и выше угол рассеяния становится порядка единицы. Качественный вид ломаной линии у траектории пакета при этом не меняется.

Для нас важно прежде всего то, что локализация волновых пакетов осуществляется столкновениями электронов и дырок между собой и что пакеты пульсируют по своим размерам от одного столкновения до повторного столкновения. Еще более важной является асимметрия коллапсов, описываемая соотношением (269).

Рассеяние на фононах, казалось бы, должно сильно повлиять на величину эффекта Соколова. Оказывается, однако, что это влияние невелико. За время  $\tau$  парных столкновений электроны успевают испытать  $\tau/\tau_e \gtrsim 1$  рассеяний на фононах с изменением направления движения на угол порядка единицы. Соотношение (269) для величины асимметрии коллапсов относится к координате вдоль направления движения пакета. Если пакет много раз меняет направление движения, то величина асимметрии вдоль некоторого заданного извне направления становится меньше. Так как скорость движения пакета по абсолютной величине всегда равна  $v_F$ , то среднее значение асимметрии вдоль некоторого направления  $x$  пропорционально отношению диффузионной скорости  $v_x$  вдоль этого направления к скорости  $v_F$ .

Допустим, что электрон столкнулся с поверхностью металла и провзаимодействовал с атомом в момент времени  $t_0$ . После отражения от границы металла средняя диффузионная скорость  $v_x$  изменяется по закону  $\sqrt{D/v_F(t-t_0)}$ , где  $D = v_F^2\tau_e$  — коэффициент диффузии. Величина асимметрии убывает со временем по закону  $v_x/v_F = [t\tau_e/(t-t_0)]^{1/2}$ . Среднее значение этой величины за время  $\tau$  равно приблизительно  $(\tau_e/\tau)^{1/2}$  и при  $\tau_e \ll \tau$  оно мало. Но следует учесть еще эффект повторных отражений от поверхности металла.

Плотность диффузионного облачка изменяется по закону  $(Dt)^{-3/2}$ , так что в единицу времени происходит  $v_F(Dt)^{-1/2}$  столкновений с границей металла. За время  $\tau$  электрон испытывает  $(\tau/\tau_e)^{1/2}$  столкновений с границей металла и при каждом таком взаимодействии электрон испытывает взаимодействие с атомом. Как мы видим, два эффекта компенсируют друг друга: эффективная асимметрия на фактор  $(\tau_e/\tau)^{1/2}$  меньше, а эффективное взаимодействие с атомом в  $(\tau/\tau_e)^{1/2}$  больше, чем это было бы в отсутствие электрон-фононных рассеяний.

Таким образом, величина (276) оказывается не зависящей от электрон-фононных рассеяний, если за время  $\tau$  атом не успевает сместиться на расстояние, большее  $l_0$ . Сильное рассеяние на фононах может сказаться лишь на временной зависимости фактора  $\Phi_*$  от времени. А именно, поскольку средняя асимметрия изменяется с

$(t - t_0)$  по закону, близкому к линейному, а суммарный эффект также накапливается линейно со временем по многим отражениям от границы металла, то нормированный на  $A_0$  фактор  $A$  изменяется по закону

$$A(t - t_0) = A_0 \frac{t - t_0}{\tau^2} \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right). \quad (278)$$

При не очень низких температурах, когда  $\tau_e \ll \tau$ , величина эффекта Соколова определяется приближенными соотношениями (276), (278). Соотношение (276) отличается от приведенного ранее в работе [88] только несколько иными обозначениями.

Величина  $E_*$  с размерностью электрического поля была названа Ю.Л. Соколовым "полем Демона". В случае горизонтальной поверхности металлического образца поле  $E_*$  определяется соотношением (273). Коэффициент  $\Phi_*$  в этой формуле определен соотношением (276). Он имеет размерность потенциала электрического поля и при  $v_0 \sim v_F$  имеет порядок величины одного вольта.

Поле  $E_*$  не является реальным электрическим полем. Оно не может быть измерено макроскопическим прибором, поскольку причиной его возникновения являются коллапсы скоррелированных квантовых систем — возбужденного атома водорода и электронов металла. Поле  $E_*$  не может быть обнаружено и при пролете пучка произвольных микрочастиц, например, пучка электронов.

Дело в том, что поле  $E_*$  не может передать энергию движущейся частице. В случае возбужденного атома водорода возможность воздействия поля  $E_*$  на атом связана с тем, что у движущегося атома уровни  $2P$  и  $2S$  имеют в точности одну и ту же энергию: величина лэмбовского сдвига компенсируется небольшим изменением кинетической энергии движущегося атома. Поэтому поле  $E_*$  изменяет только поляризацию атома без изменения его энергии.

Поле  $E_*$  является не реальным электростатическим полем, а вспомогательным корреляционным полем. Тем не менее, у него имеются некоторые черты, аналогичные свойствам электростатического поля. Из формулы (273) видно, что поле  $E_*$  выражается в виде производной по  $x$  от электростатического потенциала, образованного "поверхностным дипольным зарядом"  $\Phi_*$ , равномерно распределенным по поверхности металла.

Соотношение (273) было написано нами на примере горизонтального участка плоскости, но оно легко переносится на вертикальные или наклонные границы образца.

В случае вертикального участка плоскости, имитирующего тонкую диафрагму и расположенного от  $z = 0$  до  $z = -\infty$ , "заряд"  $\Phi_*$  имеет

одинаковый знак на обеих сторонах поверхности, а поле  $E_*$  оказывается одного знака справа и слева от полуплоскости. С помощью электростатистической аналогии можно описать и более сложную геометрию образца. Нужно помнить лишь, что в случае необходимости к электростатистическому вспомогательному полю можно добавлять постоянное поле, производная от которого по  $x$  все равно обратится в нуль и не даст вклада в  $E_*$ .

Итак, приближенная теория эффекта Соколова основана на гипотезе о том, что атом водорода образует коррелированные ЭПР-пары со свободными электронами металла. Последующие необратимые коллапсы волновых функций электронов металла приводят к совместной релаксации сложной квантовой системы: атом–электроны металла. Оказывается, что электроны и дырки (в подходе Ландау к ферми-жидкости) приводят к несколько различным вкладам в эффект, как это видно из соотношений (274), (278). Вклады, связанные с неравномерным движением волновых пакетов, из-за столкновений оказываются разного знака для электронов и дырок, так что они в значительной мере компенсируют друг друга. Поскольку вклад от электронов оказывается несколько больше вклада от дырок, то знак эффекта определяется электронами. По своей физической сущности эффект Соколова обязан своим происхождением когерентной суперпозиции взаимодействий Энштейна – Подольского – Розена.

Описанная здесь теория в существенной мере опирается на газовую модель. Она предполагает, во-первых, существование очень простой ферми-поверхности в виде замкнутой сферы, а во-вторых, слабость взаимодействия между электронами. К сожалению, второе допущение является слишком идеализированным: в реальных металлах взаимодействие электронов не может считаться слабым. Поэтому данная теория должна рассматриваться всего лишь как некоторое качественное описание эффекта. Нетрудно проверить, что при не слабом взаимодействии электронов ширина пакета  $b$  не очень велика, а уширение пакета по энергиям,  $\Delta\varepsilon \sim \hbar v_F/b$ , может быть сравнимо с  $T$ . Поэтому тонкие эффекты замедления пакетов и их последующего коллапсирования являются, скорее, проявлением идеализированной модели слабого взаимодействия. В реальных металлах картина необратимых процессов может быть не столь уж утонченной.

По этой причине кажется вполне оправданным грубый подход, который предсказывает порядок величины эффекта и оставляет некоторый свободный параметр. В соотношении (276) в качестве такого параметра служит коэффициент  $A_0$ , представляющий собой множитель порядка одной десятой. Он не может быть вычислен при принятом нами уровне точности вычислений. Как будет показано в



следующем разделе, найденная величина эффекта по знаку и по абсолютной величине соответствует экспериментальным данным.

### 43. Исследование эффекта Соколова

Для проверки теории и измерения величины и направления эффективного поля  $E_*$  были проведены специальные эксперименты [88]. Поскольку поле  $E_*$  не является макроскопическим электрическим полем, а "измеряется" только возбужденными атомами водорода, то для определения его величины и направления была использована техника сравнения  $E_*$  с обычным полем  $E$ . Конструкция соответствующего экспериментального устройства изображена на рис. 22.

Эксперименты производились с помощью пучка возбужденных атомов водорода в суперпозиции  $2S_{1/2} (F=0, F_x=0) - 2P_{1/2} \times (F=1, F_x=0)$ . Чтобы получить такой пучок,  $2S_{1/2}$  атомы пропускались через специальное устройство с высокочастотным электромагнитным полем, которое гасило  $2S$ -атомы с полным моментом  $F=1$ . Энергия атомов пучка составляла 22 кэВ. Поток атомов коллимировался щелью I в узкий пучок с толщиной 0,002 см и шириной 0,2 см. Затем он пропускаться последовательно через систему I и систему II. Система I состояла из охраняющего электрода 2 с щелью 0,3 см и пластин 3, 4 с щелями шириной 0,03 см. С помощью электрического поля  $E_1$  в промежутке между щелями 3, 4 система I суперпозицию  $2S-2P$ -состояний. Полученный пучок проходил через систему II, служившую анализатором. Она состояла либо из одиночной щели (рис. 23а), либо из пары щелей (рис. 23б). В первой щели на атомы действует только поле  $E_*$ , а в варианте рис. 23б между пластинами 5 и 6 можно было создавать электрическое поле  $E_2$ , направленное либо по направлению пучка атомов, либо против их скорости.

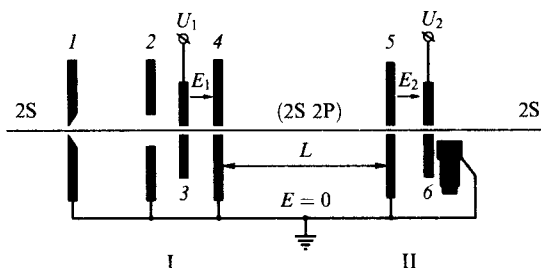


Рис. 22. Схема эксперимента по измерению величины и знака "поля Демона"  $E_*$ .

Детектор D жестко скреплен с системой II. Он может записывать интенсивность  $I$  излучения  $L_\alpha$ -квантов короткоживущей  $2P$ -компонентой пучка. Конструкция II, состоящая из пластин 5, 6 и детектора D,

Он может записывать интенсивность  $I$  излучения  $L_\alpha$ -квантов короткоживущей  $2P$ -компонентой пучка. Конструкция II, состоящая из пластин 5, 6 и детектора D,

могла перемещаться вдоль направления пучка. Расстояние  $L$  между пластиной 4 и анализатором II могло изменяться в пределах от нуля до 1,5 см. Смещая устройство II вместе с анализатором, можно измерять зависимость  $I_{2P}(L)$ . В геометрии рис. 23б электрическое поле  $E_2$  обрывается очень резко вблизи границ интервала между пластинами 5, 6, поскольку щели в этих пластинах являются очень узкими,  $\delta = 0,02$  см. Это обстоятельство позволило очень точно определить границу  $L = 0$  положений системы II при определении кривой  $I_{2P}(L)$ . При геометрии рис. 23а положение  $L = 0$  совпадает с соответствующей центральной вертикальной плоскостью геометрии рис. 23б.

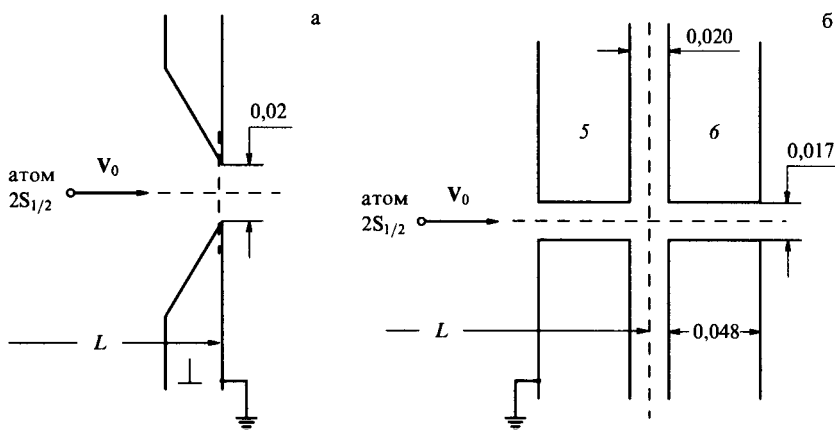


Рис. 23. Два варианта геометрии устройства II: с одной щелью без электрического поля (а) и с двумя щелями с продольным полем (б).

Все пластины 1–7, а также другие элементы системы интерферометрии, были позолочены (с толщиной золотого покрытия 2–3 мкм).

Так как поле  $E_*$  существует практически при любой геометрии, то суммарное поле  $E$ , действующее на атом внутри щели в промежутке 5–6, равно сумме полей  $E_2$  и  $E_*$ . Соответственно, возможны три комбинации полей: (1)  $E = E_* + E_2$ , (2)  $E = E_* - E_2$ , (3)  $E = E_*$ . В случае (3) пластины 5, 6 были замкнуты между собой и заземлены.

Под действием продольного поля  $E$  происходит дополнительное когерентное подмешивание 2P- и 2S-состояний атомов. Соответственно, при изменении расстояния  $L$  интенсивность излучения  $I_{2P}(L)$  осциллирует с пространственным периодом  $\Lambda_L = v_0/v$  см. Здесь  $v_0$  есть скорость атомов,  $v$  — частота лэмбовского сдвига между уровнями  $2S_{1/2}$  ( $F = 0, F_x = 0$ ),  $2P_{1/2}$  ( $F = 1, F_x = 0$ ). Очевидно, что зависимость  $I_{2P}(L)$  представляет собой типичную интерференционную картину.

При измерении интенсивности  $I_{2P}(L)$  в каждой точке  $L$  измерялись три значения интенсивности излучения, соответствующие указанным выше трем значениям поля  $E$ . Кривые  $I_{2P}(L)$  для геометрии рис. 23б достаточно хорошо аппроксимируются следующим эмпирическим соотношением:

$$I_{2P}(L) = A \exp\left(-\frac{\gamma L}{v_0}\right) + BV \exp\left(-\frac{\gamma L}{2v_0}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 L}{v_0} + \varphi\right). \quad (279)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — некоторые константы,  $V = E\delta$  — разность потенциалов между пластинами 5, 6,  $\gamma = 6,2646 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$  — константа распада 2P-атомов,  $v_0 = 2 \times 10^8 \text{ см с}^{-1}$ ,  $\nu = 909,89 \text{ МГц}$ ,  $\omega_L = 2\pi\nu = 5,717 \times 10^9 \text{ с}^{-1}$ .

В выражении (279) первое слагаемое описывает свободно распадающиеся 2P-атомы исходного пучка после прохождения системы I. Второе слагаемое возникает из-за подмешивания 2P-состояний, создаваемых электрическим полем  $E$ .

Пространственный период  $\Lambda_L = v_0/\omega = 0,23 \text{ см}$  совпадает с экспериментально измеренным значением. Рисунок 24 показывает, насколько хорошо выражение (279) аппроксимирует экспериментальные точки при значении электрического поля  $E = \pm 25 \text{ В см}^{-1}$ . Соответствующее значение константы  $BV$  равно  $BV = 7,4 \pm 0,2$ . Поскольку экспериментальное значение  $V = 0,5 \text{ В}$  величина  $B \cong 15$ . Как видно из рис. 24, кривые с  $E = 25 \text{ В см}^{-1}$  и  $E = -25 \text{ В см}^{-1}$  находятся в противофазе, а эффект  $E_*$  для геометрии рис. 23б оказывается очень

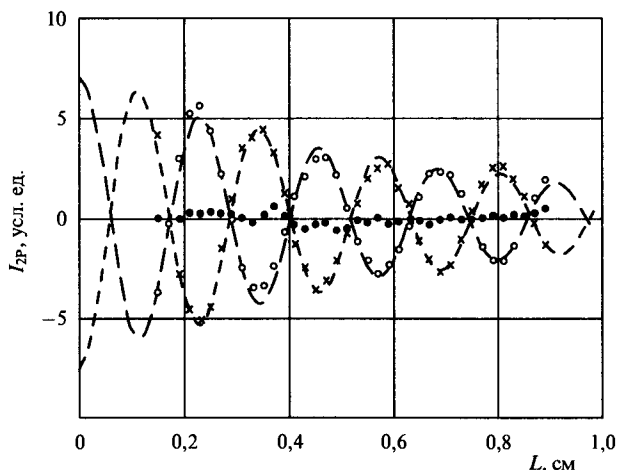


Рис. 24. Интерференционная картина, описываемая вторым слагаемым в интерполяционной формуле (279), и экспериментальные точки в конфигурации рис. 23в при трех значениях электрического поля:  $\circ$  —  $E = +25 \text{ В см}^{-1}$ ;  $\times$  —  $E = -25 \text{ В см}^{-1}$ ;  $\bullet$  —  $E_*$ .

малым. Итак, данный эксперимент позволяет найти константу  $B$ , т.е. провести калибровку эффекта по прилагаемому извне электрическому полю.

Во втором эксперименте пара пластин 5, 6 была заменена на единственную щель 7 рис. 23а. При этом значение  $L = 0$  совпадает с плоскостью щели 7. Интерференционная картина в этом случае создается только полем  $E_*$ . Она представлена на рис. 25. Экспериментальные точки достаточно хорошо аппроксимируются вторым слагаемым в выражении (279) при следующих параметрах:  $BV_* = 3,3$ ;  $V_* = 0,22$  В;  $v_0 \cong 2 \times 10^8$  см  $\text{с}^{-1}$ ;  $\gamma/v_0 = 3,07$  см $^{-1}$ ;  $\omega_L/v_0 = 28,5$  см $^{-1}$ .

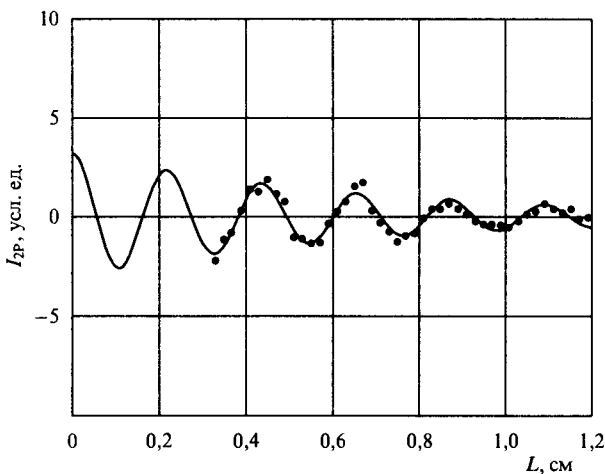


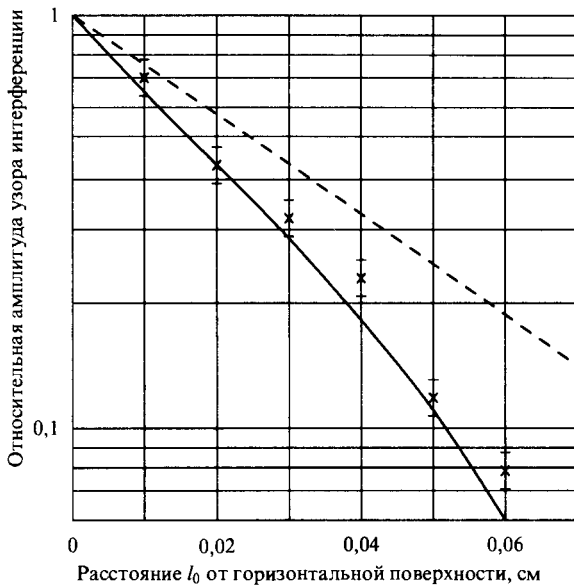
Рис. 25. Картина интерференции в эксперименте с конфигурацией 23а, когда имеется только "поле Демона"  $E_*$ .

В третьем эксперименте определялась зависимость величины эффекта от расстояния  $l_0$  пучка от поверхности металла. При этом использовалась только одна пластина с геометрией, аналогичной геометрии пластин 5, 6, в эксперименте рис. 23б. Профиль пластины был опять прямоугольным, а расстояние  $l_0$  между пучком и торцом пластины могло плавно изменяться. Экспериментальные точки для амплитуды 2P-состояний в функции  $l_0$  представлены на рис. 26. Как видно, эффект надежно наблюдается вплоть до значения  $l_0 = 0,06$  см.

Для сравнения теории и эксперимента воспользуемся соотношениями (273), (276).

В случае бесконечной горизонтальной поверхности металла интеграл (273) обращается в нуль, поскольку подинтегральное выражение антисимметрично по переменной  $(x - x')$ . Это значит, что для

величины эффекта важна конкретная геометрия металлических пластин. В частности, для геометрии эксперимента в конфигурации рис. 23



**Рис. 26.** Зависимость относительной амплитуды  $a_r$  состояний от расстояния  $l_0$  между пучком и горизонтальной плоскостью металлического образца прямоугольной формы: сплошная линия — теоретический расчет при экспериментальном значении толщины пластины  $D = 0,07$  см; штриховая линия — расчет при  $D = 0$ ;  $\times$  — экспериментальные точки.

следует учитывать вклад от вертикальных стенок металлических пластин. В общем случае имеем  $E_* = E_{*V} + E_{*H}$ , где  $E_{*V}$ ,  $E_{*H}$  представляют собой вклады от вертикальной и горизонтальной поверхностей соответственно:

$$E_{*V} = -\Phi_* \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right), \quad (280)$$

$$E_{*H} = -\Phi_* \int_0^D dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x - x'}{r^3} \right). \quad (281)$$

Здесь  $r = [(x - x')^2 + y^2 + (z - l_0)^2]^{1/2}$  в выражении (280),  $r = [(x - x')^2 + y^2 + l_0^2]^{1/2}$  в выражении (281),  $\Phi_* = A_0 e m v_0 T / \hbar \epsilon_F$ ,

$D$  — ширина горизонтальной поверхности пластины вдоль направления движения атомов пучка,  $A_0$  — константа порядка одной десятой.

Пусть координата  $x = 0$  соответствует левой вертикальной границе образца прямоугольного сечения. Тогда с помощью (280), (281) получаем

$$E_{*V} = E_{*0} \frac{1}{1+a^2}; \quad E_{*H} = E_{*0} \left( \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \right), \quad (282)$$

где  $a = x/l_0$ ,  $b = (D-x)/l_0$ ,  $E_{*0} = 2\Phi_*/l_0$ .

При малых значениях  $E$  и  $E_*$  амплитуду  $2S$ -состояния можно считать равной единице, а для амплитуды  $a_P$  состояния  $2P$  имеем уравнение

$$i\hbar \frac{da_P}{dt} = -\hbar \left( \omega_L + \frac{i\gamma}{2} \right) a_P - d(E + E_*). \quad (283)$$

Помня, что  $t = L/v_0$ , мы можем проинтегрировать это уравнение для указанных на рис. 23 геометрических размеров пластин. В геометрии рис. 23б щель между пластинами 5, 6 является очень узкой, а в эксперименте рис. 23а очень острыми являются лезвия щелевой диафрагмы. Поэтому и в том, и в другом случае можно положить  $E = -V\delta(x - x_s)$  и  $E_* = -V_*\delta(x - x_s)$ , где  $x_s$  — средняя точка между пластинами на рис. 23б или положение лезвий в эксперименте рис. 23а, а величина  $V_* = 2\pi\Phi_*$ . Решение уравнения (283) принимает при этом форму (279). Сравнивая результаты экспериментов рис. 23б и рис. 23а, находим эмпирическое значение для  $V_*$ , а именно,  $V_* \cong 0,2$  В. Отсюда следует  $\Phi_* = V_*/2\pi \cong 10^{-4}$  CGSE. Соответственно, полагая приближенно  $v_0 = 2 \times 10^8$  см  $s^{-1}$ ,  $T/\epsilon_F = 10^{-2}$ , находим экспериментальное значение константы  $A_0$ :  $A_0 \cong 0,1$ . Оно находится в удовлетворительном согласии с теоретической оценкой.

Третий эксперимент определил зависимость амплитуды  $a_P$  от расстояния  $l_0$  от пучка до металлического образца.

Эта зависимость может быть найдена теоретически, если учесть затухание  $a_P$  амплитуды из-за распада в  $1S$  основное состояние. Для этого найдем решение уравнения (283) при  $E = 0$ :

$$a_P(t) = i \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_*(t') \exp(i\omega t') dt', \quad (284)$$

где  $t' = x/v_0$ ,  $\omega = -\omega_L - i\gamma/2$ , а величина  $\omega_*$  равна

$$\omega_* = \frac{dE_*}{\hbar} = \frac{d}{\hbar} (E_{*V} + E_{*H}). \quad (285)$$

Если подставить сюда выражения (282) для  $E_{*V}$  и  $E_{*H}$ , то в общем случае образца прямоугольного сечения получаем выражение

$$\frac{a_P}{a_{P0}} = iF(\theta, \xi, \rho) \exp[(i - \beta)(\xi + \rho)], \quad (286)$$

где  $a_{P0} = 2d\Phi_*/\hbar$ ,  $d \cong 3ea_0$  — дипольный момент  $2P \rightarrow 1S$ -перехода,  $\theta = 2\pi l_0/\Lambda_L$ ,  $\xi = 2\pi D/\Lambda_L$ ,  $\rho = 2\pi D_0/\Lambda_L$ ,  $\Lambda_L = v_0/v$ ,  $\beta = \gamma/2\omega_L$ ,  $D$  представляет собой толщину образца вдоль направления пучка,  $D_0$  — расстояние точки наблюдения вдоль пучка от правой грани металлического образца. Функция  $F$  в выражении (286) равна

$$F(\theta, \xi, \rho) = H(\rho + \xi) - \mu H(\rho) + \theta[\mu V(\rho) - (\mu - 1)V(0)], \quad (287)$$

где  $\mu = \exp[(\beta - i)\xi]$ , а функции  $H$ ,  $V$  описывают вклады от горизонтальной и вертикальных граней образца:

$$H(z) = \int_{-\infty}^z \frac{\exp[(\beta - i)x]}{\theta^2 + x^2} x dx; \quad (288)$$

$$V(z) = \int_{-\infty}^z \frac{\exp[(\beta - i)x]}{\theta^2 + x^2} dx.$$

В эксперименте минимальное расстояние  $D_0$  точки наблюдения от правой вертикальной границы образца было выбрано достаточно большим,  $D_0 = 0,3$  см, чтобы быть уверенным в полном завершении процесса взаимодействия атома с пластиной металла. В этих условиях амплитуда  $a_P$  зависит только от  $l_0$  и  $D$ , но не от  $D_0$ . На рисунке 26 приведены результаты численного расчета величины  $a_P$ , нормализованной на значение  $a_P(l_0 = 0)$  при экспериментальном значении  $D = 0,07$  см. Как видно из рисунка, теоретическая кривая достаточно хорошо согласуется с экспериментальными точками, которые были получены в одних и тех же экспериментальных условиях при ступенчатом отодвигании пластины от пучка.

Анализ численных расчетов показывает, что зависимость от параметров  $D$ ,  $D_0$  является не очень сильной, так что главная зависимость эффекта от геометрии определяется "лэмбовской длиной волны"  $\Lambda_L = v_0/v$ . В частности, штриховая линия на рис. 26, относящаяся к случаю  $D = 0$ , имеет простую форму  $\exp(-2\pi l_0/\Lambda_L)$  и ухватывает основную зависимость  $a_P$  от  $l_0$ . Величина  $\Lambda_L$  является очень большой в атомных масштабах, так что эффект Соколова относится к явлениям мезоскопии.

Как мы видим, эксперимент показывает, что величина  $\Phi_*$  положительна, как это следует из простой модели электронного газа. Главным для знака эффекта является знак дисперсии электронов и дырок вблизи поверхности Ферми. Теоретические расчеты этой дисперсии для золота [89] дают величину того же знака, что и в случае газовой модели.

Итак, сравнение эксперимента с теоретическими представлениями дает их удовлетворительное согласие. Тем самым подтверждается модель корреляционной связи возбужденного атома с электронами проводимости в виде гигантского количества ЭПР-пар с одним единственным первым партнером.

#### 44. Квантовая коммуникация

Обсудим теперь вопрос о том, можно ли использовать квантовые корреляции для передачи информации. На наличие нелокальных корреляционных связей в квантовой механике впервые было указано в работе Эйнштейна, Подольского, Розена [8]. Такая корреляция выглядела как своего рода парадокс, а в более поздних работах она была установлена со всей определенностью. Большую роль при этом сыграла теорема Белла [29], согласно которой наличие скрытых параметров перед квантовыми измерениями должно было бы проявляться в виде некоторых неравенств, не наблюдающихся экспериментально [31, 90, 91]. Тем самым была подтверждена ортодоксальная квантовая механика. Вместе с тем это означает, что в момент квантового измерения возникают нелокальные корреляционные связи. В эксперименте Аспекта, Далибарда, Роджера [31] было четко показано, что эти связи устанавливаются сверхсветовым образом. Тем самым, естественно, ставится вопрос о том, нельзя ли использовать квантовые корреляции для сверхсветового обмена информацией?

Кажется, что проще всего это можно было бы осуществить с помощью ЭПР-пар скоррелированных квантовых частиц. Например, можно представить себе вариант Боба, когда коррелированные пары частиц со спином  $\pm 1/2$  и с суммарным моментом, равным нулю, разлетаются из общего центра  $x = 0$ . Тогда регистрация спина одной из частиц на расстоянии  $x = L$  от точки рождения пар сопровождалась бы регистрацией второй частицы со спином противоположного знака на расстоянии  $x = -L$ . Корреляция между спинами в момент измерения устанавливается мгновенно, т.е. возникает своего рода информационная связь.

Следует подчеркнуть, что квантовое измерение существенно отличается от классического тем, что до измерения у частицы нет



определенного значения спина. Оно появляется только в момент измерения в виде коллапса волновой функции в одно из состояний. Этот коллапс мгновенно "переносится" на вторую частицу, так что измеренный суммарный момент двух частиц оказывается равным нулю.

Таким образом, мгновенная нелокальная связь между частицами действительно существует. Однако оказывается, что эту связь между спинами двух частиц нельзя использовать для передачи информации. Дело в том, что для передачи информации нужно усреднять сигнал по многим частицам. Но как у правой, так и у левой частицы вероятности измерения спина равны в точности  $1/2$  для значений спина  $\pm 1/2$ . Измерения над одной из частиц никак не могут повлиять на статистику выхода значений спина  $\pm 1/2$  у второй частицы. Поэтому передать информацию с помощью простейших ЭПР-пар невозможно.

Вопрос о возможности или невозможности сверхсветовой передачи информации при помощи коррелированных квантовых систем может быть рассмотрен с более общих позиций для более сложных квантовых систем [92–95]. Такое рассмотрение также приводит к выводу о невозможности сверхсветовой коммуникации. Повторим кратко аргументацию этих статей.

Особенно простым является доказательство, указанное Бусси [94]. Допустим, что имеются две квантовые системы А и В, которые взаимодействовали некоторое время до  $t = 0$  и перестали взаимодействовать после  $t = 0$ . Если их общая волновая функция  $\psi_{AB}$  не распадается на произведение  $\psi_A \psi_B$  волновых функций систем А и В, то А и В образуют так называемое запутанное состояние (entangled state). При этом измерения над одной из систем откликаются в виде коллапса волновой функции второй системы, т.е. возникает основание для рассуждений о возможности мгновенной передачи информации. Оказывается, однако, что такая передача информации запрещена. Связано это с обратимой эволюцией квантовых систем до измерения. Пусть  $\rho_{AB}$  представляет собой матрицу плотности объединенной системы. Именно матрица плотности описывает возможный сигнал, накапливаемый по многим измерениям, который мог бы быть использован для передачи информации. В соответствии с уравнением Шрёдингера матрица плотности эволюционирует обратимо и каузально:

$$\rho_{AB}(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) \rho_{AB}(0) \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right). \quad (289)$$

Здесь  $H = H_A + H_B$  — гамильтониан объединенной системы в отсутствие взаимодействия. Результаты измерения любого оператора  $U_A$  в

системе А даются выражением

$$\langle U_A \rangle = \text{Tr} U_A \rho_{AB} = \text{Tr} U_A \bar{\rho}_A, \quad (290)$$

где знак  $\text{Tr}$  означает след (шпур) матрицы, а через  $\bar{\rho}_A$  обозначена редуцированная матрица плотности, т.е. результат взятия следа от матрицы  $\rho_{AB}$  по переменным системы В:  $\bar{\rho}_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ . Другими словами, в соответствии с общими принципами квантовой механики при описании системы А над матрицей  $\rho_{AB}$  должна быть проведена операция частичного взятия следа по переменным системам В. Так как  $H = H_A + H_B$ , то имеем

$$\bar{\rho}_A = \exp\left(-\frac{iH_A t}{\hbar}\right) \text{Tr}_B \left[ \exp\left(-\frac{iH_B t}{\hbar}\right) \rho_{AB}(0) \exp\left(\frac{iH_B t}{\hbar}\right) \right] \exp\left(\frac{iH_A t}{\hbar}\right). \quad (291)$$

Но след по переменным системы В от выражения в скобках равен просто  $\text{Tr}_B \rho_{AB}(0)$  и не зависит от времени. Поэтому никакие манипуляции с физическими величинами в системе В не могут повлиять на систему А. Соответственно, нет никакой возможности переслать информацию из системы В в систему А после того, как прекратилось их взаимодействие.

Эlegantное доказательство Бусси кажется вполне строгим и не оставляющим никакой возможности для передачи информации посредством квантовых корреляций. В конечном счете этот вывод делается на основе основных положений квантовой механики: эволюция до измерения подчиняется уравнению Шрёдингера, а при измерениях вероятность того или иного результата пропорциональна  $|\psi|^2$  для соответствующих компонент волновой функции.

Впрочем, в рассуждениях Бусси содержится одна неточность, которая была устранена в статье Шимони [95], построенной в духе логики Гирарди, Римини и Вебера [93]. Дело в том, что в доказательстве Бусси никак не учтен измерительный прибор, что, вообще говоря, неверно. Но если согласно [95] заменить  $\rho_{AB}$  в (291) на  $\rho_{ABM}$  и  $H_B$  на  $H_B + H_M$ , где индекс М обозначает измерительный прибор, и провести затем усреднение по переменным систем В и М, то окончательный вывод будет тем же самым: передача информации посредством квантовых корреляций запрещена основными принципами квантовой механики.

Этот вывод кажется вполне убедительным и окончательным. Но на самом деле он относится только к вполне определенной схеме. А именно, предполагается, что вначале создаются две коррелированные частицы или квантовые системы, затем эти системы разлетаются,

эволюционируя согласно уравнению Шрёдингера, и только после этого над ними производятся измерения. Время  $t$  в скобках выражения (291) выпадает только потому, что эволюция квантовой системы  $B$  предполагается причинной и полностью обратимой. Таким образом, приведенное выше доказательство оставляет открытым вопрос о возможности или невозможности передачи информации посредством квантовых корреляций в необратимых квантовых системах. Другими словами, остается вопрос, нельзя ли за счет усложнения схемы устройства и введения в нее элементов необратимости осуществить такой вариант квантовой системы, в которой передача информации посредством квантовых корреляций стала бы возможной. Ответ на этот вопрос отнюдь не тривиален.

Одна из схем подобного рода была предложена Гербертом [96]. Она основана на использовании коррелированных ЭПР-пар фотонов и детекторов с соответствующими поляризаторами и полуволновыми пластинами, расположенными в точках  $A$  и  $B$ . Пусть корреляция фотонов такова, что при измерении определенной поляризации фотона в точке  $A$  второй фотон в точке  $B$  наблюдается в ортогонально поляризованном состоянии. Если в точке  $A$  измеряется плоскополяризованный фотон, то в точке  $B$  также будет зарегистрирован фотон с плоской поляризацией. А если выбрать схему детектирования в точке  $A$  так, чтобы в ней регистрировались фотоны с круговой поляризацией, то и в точке  $B$  произойдет коллапс фотонов в состояние с круговой поляризацией. В первом случае неполяризованный в среднем пучок света в точке  $B$  будет состоять из плоскополяризованных фотонов, а во втором — из циркулярно поляризованных фотонов. Если бы в точке  $B$  имелась возможность отличать плосконеполяризованный свет от циркулярно неполяризованного света, то наблюдатель  $B$  узнал бы, в каком состоянии находится измерительная система в точке  $A$ . Так как эта информация создается коллапсами, то тем самым была бы осуществлена сверхсветовая телекоммуникация.

Чтобы установить, в каком неполяризованном состоянии находится пучок фотонов в области регистрации  $B$ , автор работы [96] предлагает использовать усилительную лазерную трубку перед системой регистрации  $B$ . По идее Герберта такая трубка должна клонировать, т.е. "вегетативно размножать" фотоны, и соответственно каждый падающий фотон должен превратиться в некоторый импульс света из многих однотипных фотонов. Установить характер поляризации такого импульса не представляет труда, так что в таком варианте необратимого устройства с лазерным усилителем, казалось бы, можно установить, что происходит с фотонами в области регистрации  $A$ .

Но как оказалось, такой "квантовый телеграф" работать не может [97, 98]. Наиболее убедительными представляются аргументы Вуттерса и Цурека, показавшими, что одиночный квант не может быть клонирован в силу линейности квантовой механики. Повторим их аргументацию. Идеальное усилительное устройство производит над фотоном следующую операцию:

$$|A_0\rangle|s\rangle \rightarrow |A_s|ss\rangle.$$

Здесь  $|s\rangle$  соответствует падающему фотону в состоянии  $s$ ,  $|A_0\rangle$  есть начальное состояние усилителя,  $|A_s\rangle$  представляет собой конечное состояние аппарата, а символ  $|ss\rangle$  относится к состоянию с двумя фотонами с одной и той же поляризацией  $s$ . Допустим, что усиление может быть выполнено для вертикальной  $|\uparrow\rangle$  и горизонтальной  $|\leftrightarrow\rangle$  поляризаций, так что

$$A_0|\uparrow\rangle \rightarrow |A_{\text{vert}}\rangle|\uparrow\uparrow\rangle, \quad (292)$$

$$A_0|\leftrightarrow\rangle \rightarrow |A_{\text{hor}}\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle. \quad (293)$$

В соответствии с квантовой механикой такое усиление может быть представлено линейным преобразованием. Поэтому, если начальная поляризация дается суперпозицией  $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\rangle$  (при  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$  это соответствует линейной поляризации под углом  $45^\circ$ ), то в соответствии с (292), (293) результат взаимодействия с усилителем должен выглядеть как

$$A_0(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\rangle) \rightarrow \alpha|A_{\text{vert}}\rangle|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|A_{\text{hor}}\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle. \quad (294)$$

Если состояния усилительного устройства  $A_{\text{vert}}$  и  $A_{\text{hor}}$  не идентичны, то два фотона выйдут из усилителя в смешанном состоянии. А если они идентичны, то два фотона вылетят в чистом состоянии

$$\alpha|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle. \quad (295)$$

Ни в том, ни в другом случае мы не получим двух фотонов в состоянии с поляризацией  $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\rangle$ . Такое состояние в случае идеального усилителя должно было бы быть записано как

$$2^{-1/2}(\alpha a_{\text{vert}}^+ + \beta a_{\text{hor}}^+)^2|0\rangle = \alpha^2|\uparrow\uparrow\rangle + 2^{1/2}\alpha\beta|\uparrow\leftrightarrow\rangle + \beta^2|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle, \quad (296)$$

где  $a_{\text{vert}}^+$  и  $a_{\text{hor}}^+$  представляют собой операторы рождения фотонов, а состояние  $|0\rangle$  соответствует вакууму. Ясно видно, что состояние (296) не совпадает с суперпозицией (295). Это означает, что не существует устройства, которое могло бы усиливать произвольную поляризацию. Разумеется, тем самым не исключается устройство, которое может усиливать порознь вертикальную или горизонтальную поляризацию.

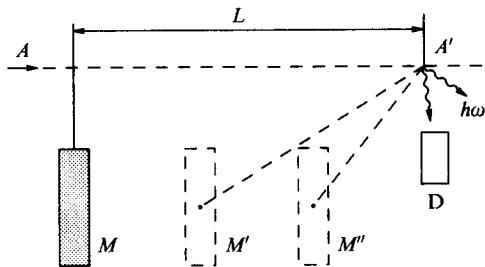
Но такой усилитель не годится для осуществления сверхсветовой коммуникации.

В статье Глаубера [98] обсуждается другой аспект предлагаемого устройства — фотонный шум. С помощью простой модели усилителя в виде перевернутого маятника им показано, что усиление шумов настолько велико, что предлагаемая Гербертом схема не может быть осуществлена и по этой причине.

Рассмотрим теперь другой вариант устройства для квантовой коммуникации [13, 99], основанного на необратимом эффекте Соколова.

Как было показано выше, эффект Соколова обусловлен квантовыми корреляциями между возбужденным атомом и коллапсирующими волновыми функциями электронов проводимости. Если управлять темпом рассеяния электронов, то, в принципе, можно было бы ожидать появления соответствующего отклика на амплитуде  $2P$ -состояний, т.е. на интенсивности излучения возбужденных атомов. В этом и состоит возможность квантовой коммуникации на основе эффекта Соколова.

Рассмотрим, например, устройство, изображенное на рис. 27, которое можно назвать "квантовым телеграфом". Фактически мы имеем несколько более сложную модификацию эксперимента Соколова. Пусть опять метастабильные  $2S$ -атомы водорода пролетают над поверхностью образца  $M$ . Если этот образец сделан из очень чистого полуметалла или полупроводника, то при температуре жидкого гелия можно добиться условий, когда длина свободного пробега



**Рис. 27.** Схема квантового телеграфа, основанного на использовании эффекта Соколова. Электроны проводимости образца  $M$  из чистого металла или полупроводника после взаимодействия с возбужденным атомом  $A$  пролетают от поверхности в глубь образца. Там их волновые функции коллапсируют, и одновременно у атома  $A'$  на расстоянии  $L \sim v_0 t$  от образца появляется  $2P$ -амплитуда. Квант  $\hbar\omega$ , излучаемый при  $2P \rightarrow 1S$ -переходе, измеряется детектором  $D$ . "Фантомы"  $M'$ ,  $M''$  ... соответствуют запаздывающим по времени копиям образца  $M$  и описывают процесс релаксации электронов в металле.

электрона до рассеяния может составлять величину  $\lambda \sim 1$  см. Пусть этот образец имеет исключительно гладкие, т.е. зеркальные, боковые стенки. Тогда провзаимодействовавший с атомом электрон  $e$  может

свободно "пробегать" расстояние  $\lambda$  до того, как он начинает интенсивно рассеиваться и коллапсировать. Можно считать, что до наступления коллапсов электронов 2P-амплитуда у 2S-атома не возбуждается. Поэтому за то время, пока электроны пролетают путь  $\lambda$ , атом успевает отлететь от образца  $M$  на расстояние  $L$ . Можно сказать, что "поле Демона"  $E_*$  действует на пролетающий над образцом атом не сразу, а со сдвигом во времени, равным  $\tau = \lambda/v_e$ , где  $v_e$  обозначает среднюю скорость электронов внутри образца. Только на расстоянии  $L = v_0\tau = \lambda v_0/v_e$  оно начинает проявляться, порождая распадающиеся 2P-атомы.

У металла  $v_e = v_F \approx 10^8 \text{ см с}^{-1}$ , а в полуметалле и полупроводнике при температуре жидкого гелия величину  $v_e$  можно снизить до значения  $v_e \approx 10^7 \text{ см с}^{-1}$ . Допустим, кроме того, что атомы  $A$  имеют очень большую энергию, так что их скорость  $v_0$  имеет порядок величины  $10^{10} \text{ см с}^{-1}$ . За время полета электрона на длине пробега  $\tau = \lambda/v_e$  атом успевает отлететь от образца на расстояние  $L = v_0\tau = \lambda v_0/v_e \gg \lambda$ .

Самый интересный вопрос состоит в том, а нельзя ли массовыми коллапсами электронов управлять? В самом деле, нетрудно представить себе структуру, с помощью которой время релаксации  $\tau$  может намеренно изменяться либо под действием деформаций, либо с помощью влияния внешнего магнитного поля на магнитные центры рассеяния. В принципе, можно использовать любые методы упорядочения или разупорядочения среды. Периодическое или аперриодическое изменение темпа коллапсов электронов, казалось бы, должно передаваться атому  $A$  практически мгновенно, приводя к его распаду и испусканию кванта лайман-альфа.

Кванты лайман-альфа от этих распадов можно детектировать, а временная зависимость темпа распада должна повторять модуляцию коллапсов в зоне рассеяния. Мы встречаемся здесь с совершенно новым принципом передачи информации, основанном на управлении коллапсами. Одиночными коллапсами ЭПР-пар управлять нельзя, но темп массовых коллапсов при рассеянии электронов на неоднородностях или примесях, как кажется, может поддаваться управлению.

Для количественного описания соответствующего физического процесса удобно воспользоваться подходом на основе введения корреляционного "поля Демона"  $E_*$ . Для этого воспользуемся опять уравнением (283), где внешнее поле  $E = 0$ , а поле  $E_*$  вычисляется по формулам (280), (281) (для образца прямоугольного сечения), но с учетом запаздывания. Именно в этом запаздывании и заключена возможность передачи сигнала посредством квантовых корреляций. Чтобы не усложнять выкладок, удобно воспользоваться упрощенным

соотношением (278) для коэффициента  $A(t - t_0)$ , который следует подставить в формулу (276) вместо константы  $A_0$ . Момент времени  $t_0$  соответствует моменту времени самого взаимодействия, которое с точностью до  $l_*/v_F$  считается мгновенным, а время  $t$  соответствует времени воздействия поля  $E_*$  на атом после взаимодействия атома с электронами проводимости при  $t = t_0$ . Пусть время  $t$  выбрано таким образом, что координата  $x$  атома равна  $x = v_0 t$ . В момент взаимодействия,  $t = t_0$ , координата  $x = v_0 t_0$ . Если не учитывать пока  $A(t - t_0)$ , т.е. положить  $A = A_0 \delta(t - t_0)$ , то при каждом значении  $t_0 = x/v_0$  корреляционное поле  $E_*$  может быть рассчитано по формулам (280), (281). Обозначим эту величину через  $E_*^0(t_0)$ . Как мы видим, она зависит от  $t_0$ . Поле  $E_*^0(t_0)$  можно считать созданным мгновенным поверхностным зарядом  $\sigma_*$ . Чтобы найти поле  $E_*(t)$ , нужно сложить все мгновенные поля:

$$E_*(t) = \int_{-\infty}^t A(t - t_0) E_*^0(t_0) dt_0. \quad (297)$$

При  $\tau \rightarrow 0$  мы получим прежний результат, но при учете запаздывания ситуация становится сложнее. Допустим, например, что фактор запаздывания имеет вид  $A(t - t_0) = A_0 \delta(t - t_0 - \tau)$ . Если  $E_*^0$  отлично от нуля вблизи металлической пластины, т.е. вблизи значения  $t \approx 0$ , то поле  $E_*(t)$  будет отлично от нуля вблизи момента времени  $t \cong \tau$ , т.е. при  $x \cong v_0 \tau$ . Можно сказать, что на расстоянии  $x = v_0 \tau$  от образца создается "фантом" металлического образца, который и действует на возбужденный атом водорода. При более реалистическом факторе вида  $A(t) = t\tau^{-2} \exp(-t/\tau)$  получаем согласно (297) целый набор, или суперпозицию "фантомов" с различными весами, определяемыми фактором  $A(t - t_0)$ . Допустим, что  $E_*^0(t_0)$  отлично от нуля вблизи  $t_0 = 0$ . При этом величина  $l_0$  — расстояние пучка от металлической пластины и  $D$  — толщина пластины должны быть много меньше  $v_0 \tau$ . Тогда  $E_*^0(t_0)$  можно вычислить по формулам (280), (281) в предположении кратковременности взаимодействия пучка с плазмой. Полагая  $E_* = -V_0 \delta(x)$ , получим с помощью (297)

$$E_*(t) = -\frac{V_* t}{v_0 \tau^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (298)$$

Если  $\omega_L \tau \ll 1$ ,  $\gamma \tau \ll 1$ , то в уравнении (283) можно пренебречь вторым членом и тогда имеем

$$a_F(t) = -\frac{i d V_*}{\hbar v_0} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (299)$$

Как мы видим, при малых значениях  $t$  амплитуда  $a_p(t)$  возрастает со временем  $\sim t^2$ , а при  $t/\tau \rightarrow \infty$  амплитуда насыщается, достигая величины  $a_p(\infty) = -i dV_*/\hbar v_0$ , не зависящей от  $\tau$ . Время  $t$  в соотношении (299) можно заменить на  $x/v_0$ , и тогда мы получаем зависимость амплитуды 2P состояния от координаты  $x$ .

Рассмотрим теперь вопрос о возможности передачи информации. Выражение (298) запишем в виде

$$E_* = -\frac{V_*}{v_0^2 \tau^2} x \exp\left(-\frac{x}{v_0 \tau}\right). \quad (300)$$

Такое представление отражает тот факт, что "поле Демона"  $E_*$  представляет собой пространственную суперпозицию "фантомов", образованных при пролете атома вблизи пластины металла при  $x \approx 0$ .

Допустим теперь, что частота электрон-электронных столкновений может испытывать слабую модуляцию. Производя замену  $1/\tau \rightarrow 1/\tau + \tilde{\nu}$ , находим линейный по  $\tilde{\nu}$  отклик в  $E_*$ :

$$\tilde{E}_* = -\frac{V_* \tilde{\nu}}{v_0^2 \tau} x \left[2 - \frac{x}{\tau v_0}\right] \exp\left(-\frac{x}{v_0 \tau}\right). \quad (301)$$

Отклик  $\tilde{E}_*$  на  $\tilde{\nu}$  является практически мгновенным:  $\tilde{E}_*(t) \sim \tilde{\nu}(t)$ . Это происходит потому, что поле  $E_*(x)$  согласно формуле (300) создается "фантамами", возникающими из-за коллапсов волновых функций электронов внутри образца металла. Распределение поля  $E_*(t)$  по пространству определяется соотношением (301).

Если  $\gamma\tau \gg 1$ , то амплитуда 2P состояния  $\tilde{a}_p$  прямо пропорциональна  $\tilde{E}_*$ , и соответственно, по излучению квантов лайман-альфа можно найти  $\tilde{\nu}(t)$  в любой точке  $x$ . При  $x \cong 0,6v_0\tau$  амплитуда  $\tilde{a}_p$  имеет максимум. Если  $\gamma\tau \lesssim 1$ , то амплитуду  $\tilde{a}_p$  нужно находить с помощью уравнения (283), так что она накапливается со временем. Соответственно, связь  $\tilde{a}_p(t)$  с  $\tilde{\nu}(t)$  оказывается интегральной, но это не исключает возможность передачи информации.

Вернемся к уравнению (283), но на этот раз используем его для вычисления амплитуды  $\tilde{a}_p$ , создаваемой под воздействием поля  $\tilde{E}_*$ . Поле  $\tilde{E}_*(x, t)$  дается выражением (301).

Пусть  $\tilde{\nu}$  имеет форму узкого импульса по времени вблизи  $t = t_1$ . Тогда согласно соотношению (284) для амплитуды-отклика  $\tilde{a}_p$  в точке  $x$  имеем

$$\tilde{a}_p(t) = i \exp(-i\omega t) \int_0^t \omega_*(x, t') \exp(i\omega t') dt', \quad (302)$$



где  $\omega = -\omega_2 - i\gamma/2$ ,  $\omega_*(x, t') = d/\hbar \tilde{E}_*(x, t')$ . Обозначим через  $\delta\tau$  ширину импульса  $\tilde{v}$ , считая, что  $\delta\tau \ll \tau$ . Допустим, что импульс  $\tilde{v}$  подобран специальным образом так, чтобы при больших значениях  $t$  интеграл в правой части (302) обращался в нуль. Другими словами, постараемся исключить эффект последствия. Для этого достаточно, например, считать, что

$$\tilde{v}(x, t') = v_0(t' - t_1) \exp\left[-\frac{(t' - t_1)^2}{2(\delta\tau)^2}\right], \quad (303)$$

где  $v_0 = \text{const}$ . С помощью соотношения (302) находим (в приближении  $\omega\delta\tau \ll 1$ ):

$$\tilde{a}_p(t) \cong iv_0(\delta\tau)^2 F(x) \exp\left[-\frac{(t - t_1)^2}{2(\delta\tau)^2} - i\omega(t - t_1)\right], \quad (304)$$

где функция

$$F(x) = \frac{V_* d}{v_0^2 \tau \hbar} x \left(2 - \frac{x}{v_0 \tau}\right) \exp\left(-\frac{x}{v_0 \tau}\right) \quad (305)$$

описывает распределение сигнала  $\tilde{a}_p$  по координате  $x$ .

Как мы видим, отклик появляется одновременно при всех значениях  $x$  в виде кратковременного импульса вблизи  $t = t_1$ . Функция (305) имеет экстремумы при  $x = (2 \pm \sqrt{2})v_0\tau$ . Первый максимум при  $x = (2 - \sqrt{2})v_0\tau \cong 0,6v_0\tau$  является наиболее подходящим для расположения детектора, регистрирующего кванты лайман-альфа от переходов  $2P \rightarrow 1S$ , обязанных импульсу  $\tilde{v}$ .

Из соотношения (304) видно, что амплитуда  $\tilde{a}_p$  быстро уменьшается с уменьшением ширины импульса  $\delta\tau$ . Поэтому ширина  $\delta\tau$  не может быть очень малой. Для наблюдения квантов от этого сигнала требуется определенное время, составляющее некоторую долю от  $1/\gamma$ . Таким образом, существует некоторое минимальное время задержки регистрации сигнала, равное  $\tau_0 \cong \delta\tau + \delta/\gamma$ , где  $\delta$  — малое число. Иначе говоря, хотя теоретически сигнал (304) может передаваться мгновенно по всем  $x$ , практически его нельзя зарегистрировать за время, меньшее  $\tau_0$ .

Можно условно сказать, что на длине  $L$  "скорость сигнала" не превышает величину  $L/\tau_0$ . Если  $L > \tau_0 c$ , то эта скорость становится больше скорости света. Но сама длина  $L$  не может быть значительно больше величины  $v_0\tau$ , поскольку амплитуда сигнала убывает с  $L$  как  $\exp(-L/v_0\tau)$ . Поэтому формально введенная "скорость сигнала"  $L/\tau_0$

не может быть существенно больше, чем  $v_0\tau/\tau_0$ . При  $\tau \gg \tau_0$  эта величина может превысить скорость света, но очень большого превышения скорости сигнала над скоростью света добиться трудно. Подчеркнем еще раз, что сам сигнал выглядит как небольшая модуляция темпа релаксации системы, в том числе темпа распадов 2Р-состояний, на малую величину порядка  $\delta\tau/\tau$  с задержкой сигнала на время  $\tau_0$  и затем с затуханием вида  $\exp(-\gamma t)$ .

Как видно из этого рассмотрения и из описания устройства рис. 27, сделать практически действующий квантовый телеграф не так-то просто, поскольку требуется удовлетворить сразу нескольким противоречивым требованиям. Нужно, чтобы образец  $M$  был очень чистым, с зеркальными стенками. Нужно, чтобы плотность свободных электронов проводимости была достаточно велика, а главное, темп их рассеяния друг на друге должен быть управляемым. Кроме того, пучок атомов должен быть достаточно интенсивным, чтобы флуктуации лайман-альфа-квантов не подавили полезный сигнал.

Но для нас сейчас гораздо более интересным является не само устройство, а принцип передачи информации. Поскольку принцип квантовой коммуникации основан на коллапсах волновых функций, то соответствующая скорость передачи информации, казалось бы, не должна лимитироваться скоростью света. При этом речь идет не о простой передаче сигналов посредством электромагнитных волн или модулированных пучков частиц. Под квантовой коммуникацией мы понимаем возможность мгновенной передачи информации при коллапсе скоррелированных нелокальных волновых функций. Однако сверхсветовая передача информации настолько непривычна, настолько она затрагивает основные принципы современной физики, что нам потребуется более подробное обсуждение возможности (или невозможности) передачи сигналов (не волн!) со скоростью больше скорости света.

Все схемы, в которых коррелированные квантовые системы разносятся на очень далекое расстояние друг от друга, оказываются непригодными в силу основного принципа квантовой теории: вероятности тех или иных результатов соприкосновения волновой функции с внешними приборами, т.е. "измерения", с большой точностью следуют закону  $p \sim |\psi|^2$ . И так как при разлете квантовых систем они эволюционируют обратимо согласно уравнению Шрёдингера, то, как видно из соотношения (291), измерения в одной из систем никак не влияют на статистику результатов измерений во второй системе.

Если использовать необратимые системы с непрерывным спектром, например, простой газ или газ свободных электронов, то в силу непрерывности спектра может иметь место малое систематическое

отклонение от закона  $p \sim |\psi|^2$  для отдельных частиц. Поэтому можно представить себе схемы, в которых это отклонение может быть использовано для передачи информации. Однако в этом случае время подготовки системы для передачи информации ограничено сверху временем релаксации  $\tau$ , например, временем столкновений электронов в металле. Поэтому речь может идти лишь о передаче информации на небольшие расстояния, т.е. в пределах одной сложной системы, испытывающей нелокальную необратимую релаксацию. Квантовая коммуникация, скорее всего, может быть возможной только в сложных необратимых системах. Не исключено, что она может играть какую-то роль в биологических системах, как наиболее ярких представителей сложной эволюции необратимых самоорганизующихся систем.

## 45. Сверхсветовая коммуникация

Условимся обозначать скорость передачи сигналов символом  $V$ , а скорость света символом  $c$ . Согласно теории относительности никакое материальное тело и никакая волна не могут двигаться со скоростью больше скорости света  $c$ . Поэтому сверхсветовая связь,  $V > c$ , не может быть связана с переносом энергии на расстояние, т.е. она должна иметь совершенно иную природу. Допустим, тем не менее, что передача сигналов со сверхсветовой скоростью возможна, и рассмотрим, к каким последствиям приводит это допущение. Для простоты ограничимся случаем одномерного распространения сигналов, и тогда мы можем ввести в рассмотрение время  $t$  и координату  $x$ , вдоль которой этот сигнал распространяется. Пусть сигнал испущен из точки  $x = 0$  в момент  $t = 0$ . Тогда в последующие моменты времени координата  $x$  будет равна  $x = Vt$ . При  $V > 0$  сигнал распространяется вправо, а при  $V < 0$  — влево.

Зададимся вопросом, что увидит наблюдатель, движущийся со скоростью  $v$ ? Для этого перейдем в систему координат этого наблюдателя и вместе с ним посмотрим на внешний мир.

Пусть  $x', t'$  — пространственно-временные координаты движущегося наблюдателя. Как хорошо известно, они связаны с  $x, t$  преобразованием Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad t' = \frac{t - (xv/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (306)$$

Точка отправления сигнала в неподвижной системе координат, т.е.  $x = 0, t = 0$ , видна из движущейся системы координат как точка

$x' = 0$ ,  $t' = 0$ . Рассмотрим теперь, как сигнал распространяется. Если положить в (306)  $x = Vt$ , то получим

$$x' = \frac{V - v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} t, \quad t' = \frac{1 - (vV/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} t. \quad (307)$$

Деля одно соотношение на другое, мы найдем скорость сигнала  $V' = x'/t'$  в движущейся системе координат:

$$V' = \frac{V - v}{1 - (vV/c^2)}. \quad (308)$$

Если  $V < c$ , то это соотношение показывает, что при  $v \geq V$  происходит смена знака  $V'$ , что вполне естественно: если наблюдатель обгоняет сигнал, то он увидит его отстающим, т.е. распространяющимся в противоположную сторону. Если мы имеем дело с электромагнитной волной, то  $V = c$  и согласно (308)  $V' = c$ . Это хорошо известный результат: свет распространяется со скоростью света в любой системе координат. Именно этот постулат и положен в основу теории относительности.

Но пусть теперь  $V > c$ . С помощью соотношения (308) мы немедленно находим систему координат, в которой скорость сигнала  $V'$  бесконечна. Эта система координат движется со скоростью  $v = c^2/V < c$ . Ясно, что система координат с бесконечной скоростью  $V'$  чем-то выделена. Раз так, то мы и примем ее за неподвижную систему координат и, переходя к пределу  $V \rightarrow \infty$ , получим с помощью (308)

$$V' = -\frac{c^2}{v}. \quad (309)$$

Как мы видим, в системе координат, движущейся вправо, сигнал распространяется влево, а при  $v < 0$  сигнал распространяется вправо, т.е.  $V' > 0$ . При  $v \rightarrow 0$  имеем  $V' \rightarrow \pm\infty$ , т.е. сигнал распространяется с бесконечной скоростью сразу в обе стороны. Разумеется, эти соотношения несколько упрощены и идеализированы, поскольку время испускания и время приема сигнала считаются равными нулю.

На первый взгляд соотношение (309) кажется явно противоречащим принципу причинности. В самом деле, допустим, что мы наблюдаем распространение сигнала с  $V' > 0$  из системы координат с  $v < 0$ . Например, отправитель сигнала может быть в точке  $x' = 0$ ,  $t' = 0$ , и тогда получатель примет сигнал в точке  $x' = L$  несколько позднее, т.е. при  $t' = L/V' > 0$ . Здесь ясно видно, где причина, а где следствие. Однако наблюдатель с  $v > 0$  увидит сигнал

со скоростью  $V' < 0$ , т.е. причина и следствие поменяются местами. Казалось бы, в силу этой несуразицы сверхсветовая передача информации невозможна. Однако не будем спешить! Само пассивное наблюдение еще мало что означает. Реальное противоречие с принципом причинности наступит только в том случае, если получатель информации сможет послать сигнал обратно в приемник до испускания первого сигнала и, таким образом, следствие сможет изменить свою причину. Давайте посмотрим, может ли это быть, а если может, то какими дополнительными ограничениями принцип причинности можно сохранить.

Пусть имеются два события  $A$  и  $B$ , связанные между собой причинно-следственной связью. Будем считать, что  $A$  есть причина, а  $B$  — следствие. Например, в квантовом телеграфе (см. рис. 27) событие  $A$  — это коллапсы волновых функций электронов проводимости, а  $B$  — появление 2P-амплитуды у 2S-атома и излучение квантов лайман-альфа. Выберем систему координат, в которой скорость передачи сигнала равна бесконечности. Тогда оба события  $A$  и  $B$  произойдут в одно и то же время  $t = 0$ . Это значит, что они располагаются на одном и том же пространственном отрезке  $AB$  (рис. 28). Выбранная нами система координат с  $V = \pm\infty$  является явно выделенной. Поэтому время  $t$  в этой системе приобретает некоторые черты абсолютного времени, но мы рассмотрим этот вопрос несколько позже.

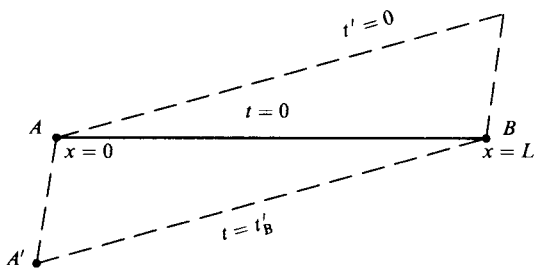


Рис. 28. Два события  $A, B$  происходят в одно и то же время  $t = 0$ , будучи разделенными пространственным отрезком длиной  $L$ . Наблюдатель, движущийся со скоростью  $v > 0$ , увидит событие  $B$  раньше события  $A$ . Штриховые линии — линии  $t' = \text{const}$ .

Пусть эти события наблюдаются из системы координат  $x', t'$ , движущейся со скоростью  $v > 0$ . Тогда согласно (306) при  $t = 0$ ,  $x = L$  получим

$$t' = t'_B = -\frac{Lv}{c\sqrt{c^2 - v^2}} < 0. \quad (310)$$

Другими словами, этот наблюдатель увидит сигнал  $B$  раньше, чем  $A$ , и наверно сильно удивится. Еще более удивительно, что в точке  $x = 0$

времени  $t'_B$  соответствует время события  $A'$ , равное

$$t_{A'} = -\frac{v}{c} \frac{L}{c}.$$

Учитывая это, наблюдатель  $B$  может захотеть повлиять на событие  $A$ , например попытавшись убрать образец  $M$  в эксперименте на рис. 27. Можно представить себе, например, что около образца  $M$  находится автомат, который немедленно удалит этот образец по приказу извне. В частности, такой сигнал может быть послан наблюдателем в штрихованной системе координат. Разумеется, если не накладывать никаких дополнительных ограничений на сигналы, принцип причинности немедленно исчезнет.

Любой сигнал на материальном носителе не может быть передан из точки  $B$  в точку  $A$  быстрее, чем за время  $\Delta t = L/c$ , поскольку скорость таких сигналов меньше скорости света в любой системе координат. Поэтому  $\Delta t > -t_{A'}$ , т.е. сочетание сверхсветового сигнала из  $A$  в  $B$  вместе с обычным световым сигналом из  $B$  в  $A$  принцип причинности не нарушает. Значит, следует рассмотреть лишь сверхсветовые телеграфы.

Допустим, что у нас есть телеграф, посылающий сигналы со скоростью  $V' = -x'/t'$  в штрихованной системе координат. Нетрудно найти с помощью (306), что в лабораторной системе координат скорость сигнала  $V$  равна

$$V = \frac{-V' + v}{1 - (vV'/c^2)}. \quad (311)$$

Для сигнала в движущейся системе координат мы выбрали отрицательное значение для скорости,  $-V'$ , предполагая, что сигнал распространяется справа налево (см. рис. 28). А скорость сигнала в неподвижной системе координат согласно соотношению (311) может быть как отрицательной, так и положительной величиной. Нетрудно видеть, что  $V < 0$  только при условии  $v < V' < c^2/v$ . Первое из этих неравенств очевидно: скорость  $v$  должна быть меньше скорости сигнала  $V'$ , чтобы сигнал смог распространяться справа налево в неподвижной системе координат. А вот то, что происходит в точке  $V' = c^2/v$ , требует более подробного рассмотрения.

Для этой цели рассмотрим квантовый телеграф (см. рис. 27). Формально вводимая скорость сигнала такого устройства  $V' = L'/\tau_0$ , где  $L'$  — расстояние точки наблюдения от металлического образца, а  $\tau_0$  — время запаздывания сигнала после включения системы "отправки сигнала". В точке  $V' = c^2/v$ , где скорость  $V$  в неподвижной системе

меняет знак,  $L' = c^2\tau_0/v$ . Величина  $L'$  представляет собой расстояние между точками  $A'$  и  $B$  в движущейся системе координат, т.е.  $L' = L(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . В точке  $V' = c^2/v$  имеет место равенство  $\tau_0 = -t'_B$ , где  $t'_B$  дается выражением (310).

Рассмотрим вопрос о петле причинности с точки зрения неподвижного наблюдателя. Пусть квантовый телеграф неизвестной конструкции послал мгновенный сигнал из точки  $A$  в точку  $B$  при  $t = 0$  (см. рис. 28). Допустим, что этот сигнал мгновенно воспринят в точке  $B$  и квантовый телеграф типа, изображенного на рис. 27, движущийся со скоростью  $v > 0$ , отправил сигнал по направлению к точке  $A$ . Этот сигнал может быть воспринят в точке  $A$  только при  $t > \tau_0 + t'_B = \tau_0 - Lv(c^4 - c^2v^2)^{-1/2}$ . Напомним, что сам сигнал выглядит как небольшой импульс в темпе образования  $2P$ -атомов со средним временным темпом порядка  $1/\tau$ , который затем наблюдается по распадам  $2P \rightarrow 1S$  со средним временным убыванием амплитуды  $2P$ -состояния по закону  $\exp(-\gamma t/2)$ .

В области  $L < \tau_0 c(c^2/v^2 - 1)^{1/2}$  никаких противоречий нет: отклик из  $B$  в  $A$  на сигнал из  $A$  в  $B$  приходит позже, чем исходный сигнал был послан из  $A$  в  $B$ . А в области  $L > \tau_0 c(c^2/v^2 - 1)^{1/2}$  может возникнуть противоречие: здесь сигнал из  $B$ , посланный справа налево, может быть обнаружен при  $t < 0$ . Этот сигнал отстоит от линии  $t' = t'_B$  на интервал времени  $\tau_0$ . Линия  $t = \text{const}$  при увеличении времени  $t$  пересекает линию  $t' = t'_B$  таким образом, что точка пересечения движется со скоростью (311). При  $L > \tau_0 c(c^2/v^2 - 1)^{1/2}$  скорость  $V > 0$ , т.е. соответствующий сигнал приходит как бы из  $x = -\infty$ . Так как  $V' = L'/\tau_0$ , то при  $x \rightarrow -\infty$  имеем  $V' \rightarrow \infty$ , т.е. скорость  $V$  согласно (311) равна своему предельному значению

$$V = \frac{c^2}{v}. \quad (312)$$

А при приближении к положению  $L = \tau_0 c(c^2/v^2 - 1)^{1/2}$  скорость  $V$  стремится к бесконечности.

Разумеется, если считать, что сигналы могут распространяться вспять по времени, сигнал с положительной скоростью  $V > 0$  можно было бы интерпретировать как сигнал в прошлое со скоростью  $V < 0$ . Однако такой сигнал в релаксирующей со временем системе (см. рис. 27) кажется неприемлемым согласно второму началу термодинамики. Поэтому требуется найти другой выход из возникшего противоречия.

Рассмотрим более реалистический случай, когда два совершенно одинаковых телеграфа типа, изображенного на рис. 27, находятся в

точках  $A$  и  $B$  при  $t = 0$ . Пусть один из них неподвижен, а второй удаляется от первого со скоростью  $v$ . Каждый из телеграфов имеет величину запаздывания  $\tau_0$  в собственной системе координат. Пусть  $L > 2\tau_0 c(c^2/v^2 - 1)^{1/2}$ . Тогда, согласно рис. 28, где следует считать  $|t'_B| > 2\tau_0$ , каждый телеграф посылает сигнал с запаздыванием, а получает отклик с опережением (в своей системе координат). Но если они информационно связаны друг с другом, то они представляют собой единую релаксирующую квантовую систему: каждую систему вместе с устройством регистрации квантов излучения от другого телеграфа и устройством модуляции скорости релаксации электронов проводимости внутри металлического образца можно рассматривать как необратимую квантовую систему. При их связи друг с другом мы получим объединенную квантовую систему с общей волновой функцией. У этой функции могут происходить процессы коллапсирования, но только в одну сторону по времени — из прошлого в будущее. Две рассматриваемые системы корреляционно связаны друг с другом только на временах, меньших  $\tau$ , и на расстояниях меньших  $\tau v$ , поскольку скорость  $v_0$  пучка атомов, осуществляющих такую связь, меньше скорости света. Сам сигнал может создаваться на интервале времени  $\tau_0 < \tau$ , но амплитуда сигнала очень быстро убывает при уменьшении отношения  $\tau_0/\tau$ . Возможность нарушения принципа причинности возникает только при достаточно большой скорости  $v$  одного из устройств и при малом отношении  $\tau_0/\tau$ . Поскольку речь идет об игре малых величин в релаксирующей системе, то гораздо проще не разбираться в деталях механизмов коллапсирования, а принять просто допущение, что в релаксирующих системах никакие необратимые процессы не могут развиваться вспять по времени.

Поэтому в применении к квантовой коммуникации можно принять три дополнительных ограничивающих принципа:

1. Каждая вновь вводимая система координат  $x', t'$  отвечает реально существующему макроскопическому телу.

2. Сверхсветовой телеграф, связанный с таким телом, может передавать в нем сигнал на ограниченное расстояние с неограниченной скоростью.

3. Сверхсветовой сигнал управления не может распространяться в обратную сторону по времени каждой из двух систем координат, если обе системы координат информационно связаны друг с другом.

Если речь идет, например, о квантовых телеграфах типа, изображенного на рис. 27, то утверждение 3 должно физически осуществляться за счет того, что атомы подвижного телеграфа должны перестать чувствовать модуляцию темпа релаксации электронов на расстоянии  $L' > c^2\tau_0/v$ . Фактически такой запрет может быть наложен только на



совместную волновую функцию двух телеграфов, подвижного и неподвижного, если они информационно связаны между собой. А с точки зрения тонкой физики он должен выглядеть как некоторая связь (constraint), накладываемая на коллапсы электронов проводимости внутри металла, так что с точки зрения коллапсов они перестают откликаться на малую модуляцию их темпа релаксации. Фактически это означает, что объединение систем  $A$ ,  $B$  в единую квантовую систему может повлиять на механизм тонкой когерентной суперпозиции ЭПР-взаимодействий.

Тем не менее, принцип 3 заслуживает дополнительного рассмотрения. Для этого мы подойдем к этому вопросу с несколько иной точки зрения. А именно, неявно предполагая, что у нас нет никакой возможности для создания сверхсветовых сигналов, кроме как основанных на волновых коллапсах, рассмотрим некоторую волновую функцию  $\psi = \exp(-i\omega t + ikx)$ . Пусть эта волновая функция относится к частице с массой  $m$  и импульсом  $\hbar k$ . Величина  $\hbar\omega$  соответствует энергии этой частицы. Учтем как кинетическую энергию этой частицы, так и энергию покоя, так что в нерелятивистском пределе  $\varepsilon = \hbar\omega = mc^2 + (mv^2/2)$ ,  $p_k = \hbar k = mv$ ;  $v$  — скорость частицы. Пусть  $V = \omega/k$  обозначает фазовую скорость. Фазовая скорость, как известно, соответствует скорости перемещения точки с постоянной фазой  $\varphi = \omega t - kx = \text{const}$ . Рассмотрим, как эта точка движется в "штрихованной" системе координат, движущейся с относительной скоростью  $v$  по отношению к неподвижной системе координат. Для этого следует с помощью соотношений (197) выразить  $x$ ,  $t$  через  $x'$ ,  $t'$  и подставить эти выражения в соотношение  $\varphi = \omega t - kx = \text{const}$ . Мы получим после этого выражения для новой частоты  $\omega'$ , нового волнового вектора  $k'$  и новой фазовой скорости  $V'$ :

$$\omega' = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad k' = \frac{k - (\omega v/c^2)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad (313)$$

$$V' = \frac{V - v}{1 - (Vv/c^2)}.$$

Нетрудно видеть, что выражение для  $V'$  в точности совпадает с соотношением (308). Соответственно, мы сразу делаем заключение, что существует выделенная система координат, движущаяся со скоростью  $v = p_k/\varepsilon = c^2/V = c^2 k/\omega$ . В этой системе координат фазовая скорость  $V'$  обращается в бесконечность, а волновое число  $k'$  — в нуль, так что волна превращается просто в однородные по  $x'$  колебания с частотой  $\omega'$ . Для выбранной нами частоты,  $\hbar\omega' = mc^2 + (mv^2/2)$ , в нерелятивистском пределе получаем

$\hbar\omega' = mc^2$ . Значит, мы имеем дело просто с покоящейся частицей с волновым числом, равным нулю. Обычно считают, что фазовая скорость большого физического смысла не имеет: энергия и, соответственно, волновая информация распространяются с групповой скоростью, а не с фазовой. Оказывается, однако, что фазовая скорость играет большую роль при коллапсах.

В самом деле, рассмотрим, типичный пример ЭПР-пары в варианте Боба: две частицы со спином  $1/2$ , разлетаются в разные стороны с суммарным импульсом, равным нулю. Два партнера такой пары имеют равные и противоположно направленные импульсы и в точности равные фазы на равном расстоянии от точки разлета. Измерение, произведенное над одной частицей, сразу же коллапсирует волновую функцию второй частицы к значению спина, соответствующего противоположному направлению. Естественно считать, что этот процесс происходит мгновенно в системе координат, где центр масс покоится. Другими словами, скорость сигнала о коллапсе  $V = \infty$ . Но в движущейся системе координат согласно (309) имеем  $V' = -c^2/v$ . В зависимости от знака  $v$  эта величина может быть как положительной, так и отрицательной. Это значит, что для одних наблюдателей сигнал коллапса на вторую частицу переносится с запаздыванием, что вполне естественно. А для других наблюдателей он переносится с опережением, т.е. вспять по времени — из будущего в настоящее. Выглядит это фантастически, но никакого нарушения принципа причинности здесь нет: коллапсы скоррелированных функций являются чисто случайными, т.е. неуправляемыми. Поэтому при коллапсах одиночных ЭПР-пар фактически никакой информации не переносится: это просто единый процесс, без причины и следствия. В этом плане сигнал об одиночном коллапсе похож на фазовую скорость — он есть, но информации не переносит.

На самом деле эта аналогия имеет более глубокий смысл. Ведь коллапсы возникают при разрушении когерентности. А разрушить когерентность между двумя точками волны посредством очень малого внешнего возмущения легче всего, если эти точки длительное время имеют одну и ту же разность фаз. Другими словами, они должны двигаться вместе с фазовой скоростью волны. Фазовая скорость сама по себе информации не переносит, но она позволяет нанести "метки" на тех участках волны, которые затем могут сколлапсировать.

Представим себе ЭПР-пару, движущуюся со скоростью  $v$ . В ее собственной системе координат коллапс отвечает переносу сигнала с бесконечной скоростью  $V' = \infty$ . А в лабораторной системе координат скорость  $V = c^2/v$ , как это видно из соотношений (311), (312). И опять,

в зависимости от того, над каким из партнеров проводится первое измерение, сигнал коллапса второму партнеру может посылатся либо в будущее, либо в прошлое. Нарушения принципа причинности опять никакого нет, поскольку результат измерения является чисто случайным: с помощью рецептов квантовой теории можно вычислить вероятность результатов измерений, но нельзя заранее предсказать сам результат.

Таким образом, хотя коллапсы и представляют собой необратимые процессы, эти процессы весьма своеобразны: они протекают абсолютно спонтанно и не поддаются управлению извне, если иметь в виду только отдельные элементарные акты. Возникает вопрос: можно ли в принципе рассуждать о каких-либо формах управления квантовыми коллапсами? Определенную надежду на положительный ответ дает пример цепной реакции в атомном реакторе. Ведь эта реакция тоже построена на элементарных квантовых переходах, каждым из которых управлять нельзя. Но если управлять вероятностями переходов, то они, будучи умноженными на большое число участников процесса, автоматически становятся соответствующими макроскопическими переменными ядерной кинетики. После этого управление становится возможным. Итак, для управления нужно иметь много участников процесса.

Вернемся теперь к квантовому телеграфу, изображенному на рис. 27. Рассмотрим сначала элементарный акт: возбужденный атом  $A$  пролетает над образцом с электронами проводимости, затем электроны улетают в глубь металла и там участвуют в коллапсах, а у атома  $A$  появляется  $2P$ -амплитуда, которая может породить квант. Если этот квант детектируется, то мы осуществляем "измерение", в котором осуществляется коллапс атома в  $2P$ -состояние с последующим переходом в  $1S$ -состояние и одновременно в области  $R$  образца  $M$  подтверждается факт многочисленных коллапсов волновых функций электронов проводимости. На первый взгляд — это единый случайный процесс коллапса: в детекторе лайман-альфа-излучения регистрируется фотон, а внутри металла коллапсируют многочисленные волновые функции электронов. У такого процесса нет внешней причины: это просто естественно развивающийся процесс диссипации. Поэтому корреляции коллапсов между электронами и атомом могут передаваться с бесконечной скоростью, а движущиеся внешние наблюдатели будут наблюдать эти коллапсы в разной последовательности во времени.

Допустим теперь, что у нас имеется целый пучок возбужденных атомов и, соответственно, большая серия идентичных измерений. Изменяя структуру области  $R$ , можно управлять вероятностями

коллапсов электронов в этой области, т.е. изменять коэффициент  $\alpha$  в выражении (259) и величину "поля Демона"  $E_*$ . Тем самым мы как бы управляем темпом распада возбужденных атомов водорода на большом расстоянии от образца  $M$ . Сигнал управления переносится вместе с сигналом коллапса, и поэтому он является сверхсветовым. Фактически это есть управление вероятностями реально протекающих квантовых процессов "измерения", т.е. необратимых информационных процессов в их связи с внешними классическими приборами и объектами (в том числе наблюдателями). Этот процесс явно необратим, именно он и определяет направление "стрелы времени". Время  $t$  внутри образца  $M$  приобретает характер "абсолютного времени": его уже нельзя обратить вспять — принцип причинности не совместим с обратимостью во времени. Что касается совместной волновой функции неподвижного и движущегося телеграфов, то согласно принципу 3 она должно эволюционировать необратимо из прошлого в будущее как со временем  $t$ , так и со временем  $t'$ .

Очевидно, что сверхсветовой сигнал управления не может распространяться в обратную сторону по времени  $t$  той системы координат, где телеграф находится в покое. По той же причине необратимости процессов измерения и управления вероятностями у телеграфа, изображенного на рис. 27 совершенно четко определено, что причиной изменения темпов распадов атомов  $A$  может быть только управляемое изменение вероятностей коллапсов в образце  $M$ . Причиной является  $M$ , следствием  $A'$ , так что сигнал управления может идти от  $M$  к  $A'$  (возможно, с запозданием на малое время  $\tau_0$ ).

Более сложным является вопрос о том, как будет действовать телеграф типа, изображенного на рис. 27, если его привести в движение и наблюдать за ним из неподвижной системы координат. В собственном времени он имеет сигнал управления со скоростью  $V' = \infty$ . Формально такой сигнал в неподвижной системе координат может распространяться как по  $t$ , так и против  $t$ . Но с другой стороны, он необратим. Спрашивается, как разрешить этот парадокс?

Выше мы условились наложить дополнительное ограничение  $C$ , смысл которого состоит в том, что необратимые процессы должны протекать только из прошлого в будущее, т.е. должна существовать "стрела времени".

Чтобы лучше понять, о чем идет речь, полезно провести аналогию с другим неравновесным процессом — переносом тепла посредством механизма теплопроводности. Рассмотрим два совершенно одинаковых стержня  $AB$  и  $A'B'$ , где буквы  $A, B, A', B'$  обозначают торцы стержней. Пусть эти стержни установлены параллельно на небольшом расстоянии друг от друга. Пусть у стержня  $AB$  торец  $A$  нагрет до

более высокой температуры по сравнению с торцом  $B$ . Тогда в стержне возникнет тепловой поток от  $A$  к  $B$ . А у стержня  $A'B'$  нагреем торец  $B'$ , так что по нему тепловой поток станет распространяться от  $B'$  к  $A'$ . Если теперь попарно соединить между собой торцы  $A, A'$  и  $B, B'$ , то мы не получим кольцевого потока тепла. Вместо этого, тепловые потоки переключатся и пойдут, в основном, от  $A$  к  $A'$  и от  $B'$  к  $B$ . Как мы видим, объединение двух неравновесных процессов порождает совершенно новый неравновесный процесс.

Точно так же, объединение двух телеграфов, неподвижного и движущегося, порождает совершенно новую необратимую систему, поскольку они становятся связанными их общей волновой функцией. Релаксация, т.е. процессы коллапсирования у объединенной волновой функции могут происходить не так, как в их изолированных друг от друга функциях. Это изменение в развитии коллапсов и устанавливается ограничением 3. Если мы объединяем телеграфы вида, изображенного на рис. 27, то при  $L < \tau_0 c(c^2/v^2 - 1)^{1/2}$  они могут обмениваться сигналами без нарушения принципа причинности. При  $L \rightarrow \tau_0 c(c^2/v^2 - 1)^{1/2}$  сигнал отклика из точки  $B$  в точку  $A$  (см. рис. 28) стремится к нулю. А при  $L \geq \tau_0 c(c^2/v^2 - 1)^{1/2}$  сигнал с точки  $B$  на линию  $A'A$ , т.е. при  $t < 0$ , передан быть не может: объединение двух телеграфов в замкнутую информационную петлю не даст возможности передать сигнал вспять по времени  $t$  с помощью подвижного телеграфа.

С точки зрения физических процессов внутри телеграфов вида, изображенного на рис. 27, этот процесс можно пояснить следующим образом. Согласно (304) отклик  $\tilde{a}_r$  получается вследствие модуляции темпа релаксации волновых функций электронов внутри металла. Строго говоря, у каждого отдельного электрона нельзя определить момент коллапсирования с точностью, большей, чем  $\Delta t \sim \tau$ . Соотношение (304), по нашей логике, относится только к очень большому количеству электронов, коллапсы которых распределены по времени таким образом, что они дают запаздывание вида (298). При объединении двух телеграфов в единую систему сами коллапсы немного изменяются: достаточно небольшого воздействия внешнего окружения на коллапсы, чтобы сигнал (304) исчез. Принцип 3 как раз устанавливает то ограничение на коллапсы, которое не дает возможности для нарушения принципа причинности.

Мы вернемся к этому вопросу позже. А сейчас заметим, что коррелированные в пространстве коллапсы просто обязаны лежать на пространственно подобных мировых линиях. В противном случае мы имели бы последовательные во времени коллапсы (в одной из подвижных систем координат), а это привело бы к еще большим

противоречиям с принципом причинности, если скрытых параметров действительно не существует. Итак, самое естественное допущение состоит в том, что коррелированные коллапсы происходят "мгновенно", например располагаясь на линиях фазовой скорости  $v_\varphi = \varepsilon/p = \text{const}$  центра тяжести скоррелированной системы. Скорости  $\varepsilon/p$  всегда являются сверхсветовыми, и именно вдоль них действуют случайные измерения. Но чтобы понять, как это может происходить, нам понадобятся дополнительные рассуждения.

## 46. Настоящее, прошлое, будущее

Что такое настоящее? Каждый из нас имеет готовый ответ: это — данный миг, поскольку все более раннее — это уже несколько в прошлом. До появления теории относительности такой ответ вполне был согласован и с более строгой математической, т.е. количественной трактовкой (рис. 29а). В простейшем случае одного измерения  $x$  мы

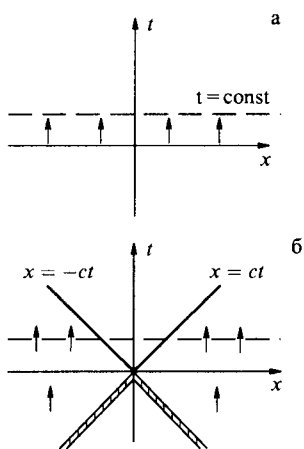


Рис. 29. До появления теории относительности структура пространства времени рассматривалась как равномерное движение всего пространства вдоль координаты мирового времени  $t$  (а). Поскольку свет имеет постоянную скорость, то реально "видимое" настоящее располагается в заштрихованном слое, а линия  $t = \text{const}$  имеет смысл условного времени (б).

имеем пространство, которое равномерно смещается вдоль оси времени  $t$ . Время в этом подходе является абсолютным; во всех точках  $x$  оно течет с одним и тем же темпом и совершенно одинаково для неподвижных и движущихся тел (рис. 29б).

В теории относительности все обстоит сложнее. Главный ее принцип — не существует сигналов, распространяющихся быстрее скорости света, а скорость света одинакова как в неподвижной, так и в движущихся системах координат. Для жителей Земли это означает, что одновременность на земной поверхности определена с точностью до  $2R_0/c \cong 40$  мс, где  $R_0$  — радиус Земли. А если смотреть на звездное небо, то мы увидим звезды на линии  $t = -L/c$ , где  $L$  — расстояние до звезды, а  $t$  — время в прошлом, отсчитываемое от момента наблюдения. Вряд ли кто-нибудь из смотрящих на звезды согласится с тем, что он их видит не "сейчас". На рисунке 29б этому "настоящему видимому" соот-

ветствуют линии  $x = \pm ct$ , уходящие в отрицательное время. Для всех жителей Земли это настоящее определено с точностью до  $2R_0/c$ .

А что же означает линия  $t = \text{const}$ ? Строго говоря, эта изохронная линия, т.е. линия одного и того же времени, является достаточно условной. Она может быть получена таким образом. Сначала вдоль оси  $x$  располагается множество часов, т.е. одинаковых физических тел или механизмов, совершающих периодическое движение с одним и тем же периодом. Затем эти часы синхронизируются, например, с помощью светового сигнала, бегущего от данных часов к соседним и обратно. Все эти действия совершаются в прошлом, и таким образом создается протяженный периодический объект с одной и той же мгновенной фазой: при  $t = \text{const}$  все стрелки часов указывают одно и то же время.

Рассматривая каждые из часов как осциллятор с периодом  $T = 12$  часов, мы получаем волну с волновым вектором  $k = 0$  и частотой  $\omega = 2\pi/T$ . Ясно, что такой классический объект с бесконечной фазовой скоростью может быть создан только с помощью эволюции из прошлого, и в любой данный момент  $t$  никакой физической связи между часами не существует.

Можно рассуждать немного по-другому. Допустим, что в прошлом, при  $t = t_0$ , две физические системы находились в одной и той же точке  $x = 0$ . Пусть затем одна система покоится, а другая движется со скоростью  $v$ . За время  $t - t_0$  вторая система передвигается на расстояние  $L = v(t - t_0)$ , а ее собственное время согласно соотношениям (197) будет равно  $t' - t_0 = (t - t_0)(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . При  $v^2/c^2 \rightarrow 0$   $t'$  совпадает с  $t$ , т.е. медленно расходящиеся друг от друга физические системы, имеющие общую историю, имеют также общее время. Другими словами, в нерелятивистской теории время является "абсолютным".

Рассмотрим теперь одинокого покоящегося наблюдателя в точке  $x = 0$  в момент времени  $t$  (рис. 30).

Мировая линия покоящегося наблюдателя соответствует полуоси ординат, приходящей из  $t = -\infty$  в точку  $t = 0$ . В точку  $O$  с координатами  $x = 0, t = 0$  могут попасть также движущиеся тела, например  $A$  — с положительной скоростью и  $B$  — с отрицательной скоростью. Согласно теории относительности максимальная скорость, с которой могут перемещаться любые материальные объекты, в том числе волны, равна скорости света. Поэтому в точку  $O$  может собраться только та информация, которая существовала ранее внутри заштрихованной области на рис. 30. Это и есть то прошлое, которое можно либо непосредственно видеть, слышать, осязать, либо восстановить по памятникам старины и "окаменелостям", находящимся в точке  $O$ .

Таким образом, мы приходим к несколько парадоксальному выводу, что будущее наблюдателя  $O$  находится не при  $t > 0$ , а во всей не заштрихованной области на рис. 30. Во всяком случае, так это

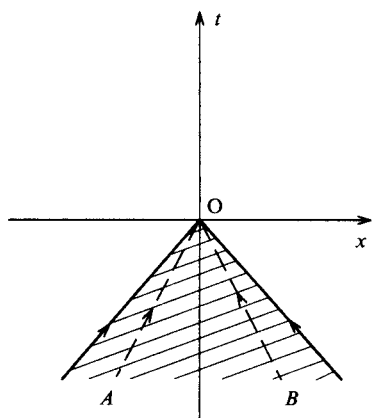


Рис. 30. У наблюдателя  $O$  в точке  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$  реальное "прошлое" находится в заштрихованной области, ограниченной линиями  $x = \pm ct$ . Линии  $A$  и  $B$  соответствуют движущимся телам.

должно представляться с точки зрения одиночного наблюдателя. Что же касается прошлого, то оно должно представлять собой область, доступную для пассивного сбора информации, приходящей с электромагнитными волнами или записанной на любых движущихся материальных носителях (т.е. звук, почта и т.д.).

Рассмотрим теперь, как может выглядеть область двусторонней информационной связи наблюдателя  $O$  с любым другим наблюдателем в прошлом (или "настоящем").

Пусть наблюдатели  $A$ ,  $O$ ,  $B$  неподвижны (рис. 31а). В состоянии  $O'$ , т.е. в момент времени  $(-t)$ , наблюдатель может послать сигналы с максимальной скоростью

$c$ . Эти сигналы достигают мировых линий  $A'A$  и  $B'B$  двух других наблюдателей в точках  $A''$ ,  $B''$ , которые в свою очередь посылают свои "ответы" в точку  $O$ . Как видно из рисунка, наблюдатели  $A$  и  $B$  находятся на расстоянии  $L = \pm ct/2$ . Внутри этих мировых линий находится область (заштрихованная) двусторонней связи неподвижного наблюдателя  $O$  с другими неподвижными наблюдателями. В частности, в точках  $A$ ,  $O$ ,  $B$  могут находиться часы, и тогда двусторонняя связь может быть использована для синхронизации неподвижных часов, т.е. для построения линий  $t = \text{const}$ .

В точку  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$  могут собраться и подвижные наблюдатели. Если они имели до этого двустороннюю связь с другими объектами, то в точку  $O$  будет собрана вся информация двусторонней связи. Например, на рис. 31б подвижный наблюдатель в положении  $O'$  в момент времени  $-t$  посылает информацию со скоростью света в точку  $A''$  мировой линии  $A'A$  неподвижного наблюдателя, а затем в точке  $O$  получает ответ от второго наблюдателя.

Как мы видим, если в точку  $O$  собираются все подвижные наблюдатели, то в этой точке оказывается собранной вся информация



двусторонней связи из области внутри линий  $x = \pm ct$ . Другими словами, наряду с данными пассивных наблюдений в эту точку можно собрать информацию двусторонней связи.

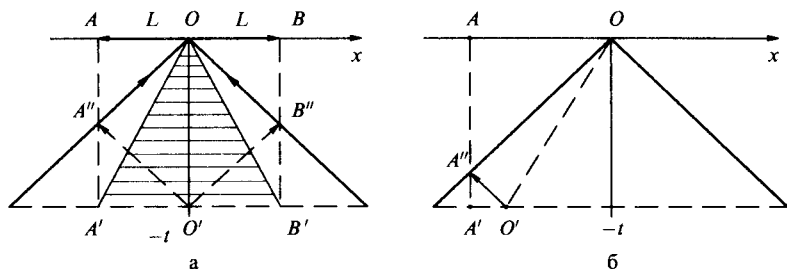


Рис. 31. Пространственно-временная область двусторонней связи наблюдателя  $O$  с другими наблюдателями: а — наблюдатель  $O'$  неподвижен; б — наблюдатель  $O'$  перемещается вдоль линии  $O'O$ .

Рассмотрим теперь двух неподвижных наблюдателей  $A$  и  $B$ , находящихся на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 32).

Каждый из наблюдателей ничем не выделен по отношению к другому. Но один из них, скажем  $A$ , видит  $B$  несколько в более раннее время в точке  $B'$ , а  $B$ , напротив, видит  $A$  несколько в более раннее время в точке  $A'$ . Естественно, что оба они согласятся считать, что в каждый данный момент они находятся при  $t = \text{const}$ , и лишь в силу запаздывания сигналов они не имеют мгновенной информации друг о друге. Покрытая точками область на рис. 32 — это общее прошлое как наблюдателя  $A$ , так и наблюдателя  $B$ .

Разумеется, с точностью до интервала времени  $\Delta t = L/c$  наблюдателей  $A$  и  $B$  можно считать находящимися в одном времени даже с точки зрения их взаимной информационной связи. Это их общее время они, естественно, будут считать настоящим. При более коротких характерных временах физических процес-

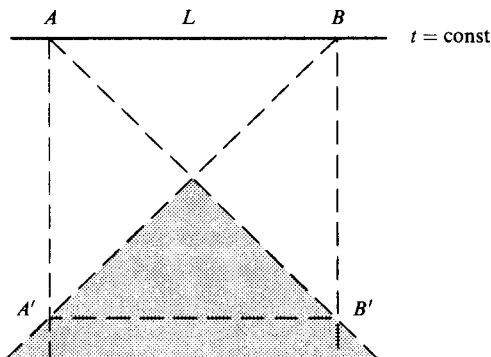


Рис. 32. Наблюдатели  $A$  и  $B$  расположены на расстоянии  $L$  друг от друга.  $A$  видит  $B'$ , а  $B$  видит  $A'$ , затемненная область — их общее прошлое.

сов наблюдателя, скорее, согласятся с запаздывающими сигналами, чем со своим разновременным существованием.

В теории относительности понятие одновременности становится еще более сложным. А именно, преобразование Лоренца в систему координат  $x', t'$ , движущуюся со скоростью  $v$ , осуществляется с помощью формул (308). Линии одного времени  $t' = \text{const}$  оказываются не совпадающими с линиями  $t = \text{const}$  (рис. 33). Но граница прошлого,  $x = \pm ct$ , остается на своем месте и в новой системе, т.е.  $x' = \pm ct'$ .

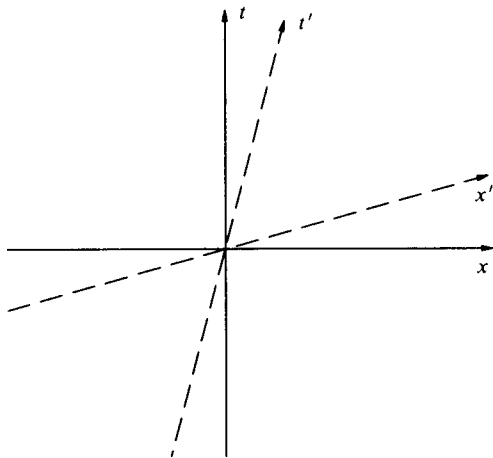


Рис. 33. Координаты  $x', t'$  движущейся системы координат на плоскости  $x, t$ .

При увеличении скорости  $v$  наклон линии  $t' = \text{const}$  к оси  $x$  увеличивается, но он никогда не достигает положения  $x = ct$ , стремясь к нему лишь в пределе  $v \rightarrow c$ .

Теперь мы можем обсудить, что такое будущее. В рамках галилеевой инвариантности с абсолютным временем  $t$  будущее по отношению к  $t = 0$  определяется простым соотношением  $t > 0$ . А именно, при небольшом приращении

времени  $\Delta t$  реализация будущего происходит сразу по всем значениям координаты  $x$ . В теории относительности все выглядит по-другому. Если учесть, что не существует тел и волновых сигналов со скоростью, большей  $c$ , то "активное" будущее для точки  $x = 0, t = 0$  лежит в области  $t \geq |x|/c$ , куда из точки  $x = 0, t = 0$  могут попасть световые сигналы или движущиеся тела. Только в этой области материальная точка  $x = 0, t = 0$  может действием повлиять на эволюцию своего окружения. Теми же свойствами эта область выделена и в случае движущихся тел с мировыми линиями, проходящими через точку  $x' = 0, t' = 0$ .

Все наши рассуждения данного раздела основывались на представлениях теории относительности и классической теории поля. Рассмотрим теперь, что нового вносят коллапсы волновых функций. Как мы установили выше, коллапсы функций коррелированных частиц происходят на мировых линиях фазовой скорости их центра тяжести.

Для неподвижного центра тяжести эта линия соответствует  $t = \text{const}$ , а для перемещающегося со скоростью  $v$  — линия  $t' = \text{const}$ . С точки зрения рис. 31, 32 коллапсы происходят как бы в будущем. Именно поэтому они случайны и беспричинны. Но коллапсы — это необратимый процесс. Особенно ясно это становится видно, когда коллапс волновой функции сопровождается коллапсом вероятностей, как это происходит при измерениях. При таком процессе информация у квантовой системы возрастет, а во внешнем мире должна возрасти энтропия. Но даже в отсутствие коллапса вероятностей коллапс волновой функции необратим: у ансамбля многих частиц он превращает чистый ансамбль в смешанный. А у одного единственного партнера происходит "схлопывание" чистого состояния в случайного "представителя" смешанного ансамбля. Необратимый процесс коллапса связан с информационным взаимодействием данной системы с внешним миром. А если так, то система координат, связанная с внешним окружением, становится предпочтительной, а время  $t$  в этой системе координат приобретает черты абсолютного времени. На Земле, а точнее в Солнечной системе, это время связывается с системой координат, в которой центр масс Солнечной системы находится в покое.

Если мы рассмотрим линию  $t' = \text{const}$  на рис. 33, то ее можно интерпретировать как мировую линию постоянной фазовой скорости, на которой могут располагаться коллапсы коррелированных частиц, у которых центр тяжести перемещается со скоростью  $v$ . Если бы система частиц и тел с покоящимся центром масс в системе координат  $x'$ ,  $t'$  была бы полностью, в том числе и информационно, изолирована от внешнего мира, то коллапсы в ней могли бы одновременно осуществляться вдоль линии  $t' = \text{const}$ .

С точки зрения абсолютного времени  $t$  все выглядит почти так же, с той лишь разницей, что связанные с внешним миром коллапсы, например наблюдаемые извне, должны происходить последовательно в сторону возрастания времени  $t$ . Коллапсы в обратную сторону по  $t$  вдоль линии  $t' = \text{const}$  могут происходить только в отсутствие наблюдения или информационной связи с внешним миром. Только в этом случае оба направления времени замкнутой обратимой квантовой системы вполне эквивалентны. В действительности же даже слабая информационная связь с внешним миром приводит к тому, что как по  $t$ , так и по  $t'$ , необратимые процессы могут эволюционировать только из прошлого в будущее.

Теперь мы можем вернуться к квантовому телеграфу. Квантовый телеграф использует объективно происходящие коллапсы. Меняя извне конфигурацию физической системы и тем самым оказывая

воздействие на вероятности случайных естественных коллапсов, можно попытаться осуществить сверхсветовую передачу информации. Но эта передача информации, будучи построенной на необратимых процессах по "абсолютному" времени  $t$ , не может передаваться в обратную сторону по  $t$ : мы совершенно четко встречаемся со "стрелой времени". Итак, мы естественным образом приходим к принципу С, т.е. к невозможности распространения информационных сверхсветовых сигналов из будущего в прошлое.

Чтобы более ясно представить себе, почему не следует а priori отвергать возможность квантового телеграфа, полезно иметь в виду следующую аналогию. Главными средствами передачи информации в животном мире, в том числе у людей до изобретения радио, являются звук и свет. Звучом мы пользуемся активно: голосовыми связками создаем устную речь, а затем воспринимаем ее на слух. А в случае света мы пассивно воспринимаем рассеянное предметами излучение Солнца. С изобретением радио электромагнитные волны стали активно генерироваться передатчиками и восприниматься приемниками, т.е. были освоены, как звук. С этой точки зрения сверхсветовые телеграфы являются как бы аналогом света и цвета при дневном освещении. Волновые функции микромира находятся в условиях не прекращающегося процесса последовательного коллапсирования. Меняя детали такого коллапсирования в одной точке пространства, можно затем (т.е. с небольшим сдвигом по времени  $t$ ) повлиять на изменение вероятностей коллапсов в других точках пространства. Само коллапсирование передать в другую точку пространства невозможно. Но нельзя исключить возможность управляемо менять классическое окружение множества коллапсирующих систем в одной точке пространства и детектировать это влияние на коллапсы в другой, далеко отстоящей пространственной точке. Для этого волновые функции в этих точках должны быть коррелированными, т.е. не факторизуемыми, а квантовые системы должны быть релаксирующими.

## ОТ КВАНТОВ К КЛАССИКЕ

Основная тема этой главы — появление классического поведения у макрообъектов, т.е. "сшивка" макромира с микромиром. В разделе 47 представлена типичная квантовая процедура описания квантовых систем в рамках аппарата вторичного квантования. В конце раздела сделано замечание о том, что информационная открытость соответствующей квантовой системы должна быть учтена с помощью случайного оператора коллапсирования. Но как он в действительности должен действовать, показано в следующем разделе 48 на примере обычного газа.

Для описания газа используется кинетическое уравнение для амплитуд. Как видно, столкновения частиц приводят, во-первых, к пакетизации их волновых функций, а во-вторых, к случайным парным столкновениям. Каждое такое столкновение уничтожает два сталкивающихся волновых пакета и рождает два рассеянных пакета. Так как число частиц сохраняется, то вместо операторов рождения и уничтожения удобнее пользоваться операторами рассеяния. Оператор рассеяния равен произведению оператора уничтожения на оператор рождения (порядок действия операторов читается справа налево). Очевидно, что член столкновений равен произведению двух операторов рассеяния.

Оператор столкновений является случайным, но его статистические характеристики должны быть согласованы с законом  $p \sim |\psi|^2$ , т.е. с классическим кинетическим уравнением.

С помощью кинетического уравнения для амплитуд можно понять, как происходит сужение волнового пакета тяжелой броуновской частицы. А затем, по аналогии, можно описать механизм пакетизации волновых функций макроскопических течений (в том числе, звуковых волн) в газе. Видно, что квантовый хаос у волновых функций атомов газа сам по себе приводит к классическому описанию волн и вихрей в обычном газе.

## 47. Вторичное квантование

В системах многих одинаковых частиц во многих случаях более удобным оказывается аппарат вторичного квантования. Мы обсудим его здесь только в той мере, в какой он может быть полезен для более ясного понимания тех рассуждений, в которых привлекаются понятия операторов рождения и уничтожения частиц. Пусть  $\psi_N(x_1, \dots, x_N, t)$  есть волновая функция тождественных частиц, зависящая только от одной из пространственных координат  $x_i$  для каждой  $i$ -й частицы из общего числа  $N$ . Для простоты мы допустим, что эти частицы удовлетворяют бозе-статистике, т.е. волновая функция симметрична по переменным  $x_i$ . На языке вторичного квантования нет необходимости фиксировать число частиц  $N$ , допуская возможность как рождения и аннигиляции частиц, так и изменения чисел заполнения различных квантовых состояний. Поэтому вместо одной функции  $\psi_N$  можно представить себе набор функций  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, \dots$  с разным числом частиц. Эти функции можно расположить в виде столбца, и тем самым мы получим так называемый вектор состояния в пространстве Фока. Оказывается, что вместо рассмотрения функции  $\psi_N$  удобно ввести операторные функции, действующие на вектор состояния. Эти операторные функции представляют собой вторично квантованное, или просто квантовое, поле. В рассматриваемом нами случае пространства Фока вводят два операторных поля: оператор рождения  $\Psi^+(x)$  и оператор уничтожения  $\Psi^-(x)$  одной частицы. Иногда у оператора  $\Psi^-(x)$  значок "минус" опускают, и тогда  $\Psi^+$  означает просто эрмитово-сопряженный оператор по отношению к  $\Psi$ . Оператор  $\Psi$  при действии на функцию  $\psi_N$  переводит ее в  $\psi_{N-1}$ , а оператор  $\Psi^+$  переводит  $\psi_{N-1}$  в  $\psi_N$ . Явное выражение для этих операторов имеет вид

$$\Psi(x)\psi_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{l=1}^N \delta(x - x_l) \psi_{N-1}(x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_N), \quad (314)$$

$$\Psi^+(x)\psi_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}) = N^{1/2}\psi_N(x, x_1, \dots, x_{N-1}). \quad (315)$$

Добавим сюда еще одно полезное соотношение для коммутатора операторов  $\Psi(x)$  и  $\Psi^+(y)$

$$[\Psi(x), \Psi^+(y)] \equiv \Psi(x)\Psi^+(y) - \Psi^+(y)\Psi(x) = \delta(x - y). \quad (316)$$

Наиболее просто действие этих операторов можно понять на примере невзаимодействующих частиц, когда в качестве симметризованной функции  $\psi_N$  можно взять произведение одночастичных функ-

ций  $\psi_1$ :

$$\psi_N(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \psi_1(x_i). \quad (317)$$

Такое состояние называют бозевским конденсатом. Теперь мы видим, что оператор  $\Psi(x)$  превращает функцию  $\psi_1(x_i)$  в  $\delta$ -функцию  $\delta(x - x_i)$ , и затем по всем  $\delta(x - x_i)$  производится суммирование. А оператор  $\Psi_N^+$  добавляет к произведению (317) еще один множитель  $\psi_1(x)$ . Можно сказать (с точностью до множителя  $1/N^{1/2}$  или  $N^{1/2}$ ), что оператор  $\Psi(x)$  осуществляет замену одной из функций  $\psi_1(x_i)$  на  $\delta$ -функцию в точке  $x$ , так что один из сомножителей типа  $\psi_1(x_i)$  исчезает. А оператор  $\Psi^+(x)$  просто добавляет еще одну частицу с волновой функцией  $\psi_1(x)$ , т.е. увеличивает число сомножителей типа  $\psi_1(x_i)$  на единицу. С помощью соотношений (314), (315) нетрудно найти выражение для оператора  $\Psi^+\Psi$ , который называется оператором числа частиц  $N$ :

$$\begin{aligned} N\psi_N(x_1, \dots, x_N) &\equiv \Psi^+(x)\Psi(x)\psi_N(x_1, \dots, x_N) = \\ &= \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)\psi_N(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (318)$$

Оператор числа частиц является диагональным, а интеграл  $\int \Psi^+(x)\Psi(x)dx \psi_N = N\psi_N$ , т.е. он равен просто числу частиц  $N$  для каждой из функций  $\psi_N$ . Чтобы лучше представить себе смысл операторов  $\Psi(x)$ ,  $\Psi^+$ ,  $N$ , удобно усреднить их, т.е. проинтегрировать по  $x_1, \dots, x_N$  с весом  $|\psi_N|^2$ . После интегрирования в простейшем случае (317) получаем

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x) \rangle_N &= N^{1/2}\psi_1^*(x), \quad \langle \Psi^+(x) \rangle_N = (N+1)^{1/2}\psi_1(x), \\ \langle N \rangle_N &= N|\psi_1(x)|^2. \end{aligned} \quad (319)$$

В более общем случае, когда  $\psi_N$  не равно произведению (317), вместо  $\psi_1(x)$  входит одночастичная функция, усредненная по всем  $N$  переменным, кроме одной. С помощью операторов  $\Psi(x)$ ,  $\Psi^+(x)$  легко конструируются проекционные операторы. Допустим, например, что в результате измерения начальная функция  $\psi_1$  коллапсирует в  $\psi_c$ . Если у нас имеется только одна частица, то этот коллапс осуществляется оператором коллапсирования (151). А если мы имеем  $N$  частиц, то мы должны осуществить коллапс поочередно у каждой из частиц да еще симметризовать полученную таким образом волновую функцию,

чтобы учесть бозе-симметрию. Если мы проинтегрируем (314) по  $x$  с весом  $\psi_c(x)$ , то мы как раз и получим в правой части волновую функцию, у которой один из сомножителей  $\psi_1(x_l)$  заменен на  $\psi_c(x_l)$ , т.е. у этой частицы осуществлен коллапс  $\psi_1(x_l) \rightarrow \psi_c(x_l)$ . Теперь для получения выражения типа (151) нам осталось лишь добавить матричный элемент  $\langle \psi_c | \psi_1 \rangle$ . Как нетрудно видеть, его можно получить с помощью интегрирования (315) по  $x$  с весом  $\psi_c^*(x)$ . Таким образом, мы естественно приходим к следующему выражению для проекционного оператора:

$$P_c = \int \psi_c^*(x) \Psi^+(x) dx \int \psi_c(y) \Psi(y) dy. \quad (320)$$

Разумеется, это выражение пишется с точностью до нормировочного множителя (если конечная волновая функция предполагается нормированной). Если воспользоваться соотношениями (314), (315), то действие проекционного оператора (320) на волновую функцию  $N$  частиц  $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$  запишется как

$$P_c \psi_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{l=1}^N \psi_c(x_l) \cdot \int \psi_c^*(x_l) \psi_N(x_1, \dots, x_N) dx_l. \quad (321)$$

Другими словами, у волновой функции  $\psi_N$  вычисляется матричный элемент по отношению к функции  $\psi_c^*(x_l)$ , затем он умножается на  $\psi_c(x_l)$ , и полученное выражение симметризуется по всем частицам. После коллапса симметрия типа (317) теряется, но все же и новое выражение в применении к функции (317) выглядит достаточно просто.

Введение операторов  $\Psi$ ,  $\Psi^+$  удобно тем, что с их помощью описание динамики квантовых частиц становится очень похожим на описание динамики полей. Поэтому и оператор  $\Psi(x)$  называют обычно квантовым полем. Поясним, о чем тут идет речь.

Оказывается, прежде всего, что некоторые аддитивные физические величины выражаются очень просто через операторы  $\Psi(x)$ ,  $\Psi^+(x)$ . Например, импульс одной частицы  $p_x$  выражается в виде оператора

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

который применяется к волновой функции. А если мы определим оператор

$$P_x = \int \Psi^+(x) p_x \Psi(x) dx, \quad (322)$$



то согласно формулам (314), (315) его действие на  $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$  эквивалентно сумме импульсов всех  $N$  частиц. Аналогичным образом, усредненный по  $x$  одночастичный гамильтониан  $\int \Psi^+(x)H(x)\Psi(x) dx$  в применении к  $\psi_N$  равен сумме гамильтонианов  $N$  частиц. Более того, даже при наличии парных сил с потенциалом  $U^{(2)}(|x - y|)$  полный гамильтониан может быть записан в компактной форме

$$H = \int \Psi_+(x)H^{(1)}\Psi(x)dx + \int \Psi^+(x)\Psi^+(y)U^{(2)}(|x - y|)\Psi(x)\Psi(y) dx dy. \quad (323)$$

Здесь  $H^{(1)}$  — одночастичный гамильтониан в поле сил с потенциалом  $U^{(1)}(x)$ , а  $U^{(2)}(|x - y|)$  — потенциал взаимодействия частиц. При описании динамики многих частиц часто оказывается удобным переход к представлению чисел заполнения. Он производится следующим образом. Пусть  $\psi_n(x)$  есть полный ортонормированный базис. В качестве такого базиса мы рассматривали, например, стоячие волны типа

$$\psi_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

Но в общем случае  $\psi_n$  являются комплексными. Операторы  $\Psi(x)$ ,  $\Psi^+(x)$ , как функции переменной  $x$ , могут быть разложены в ряды:

$$\Psi(x) = \sum_i a_i^- \psi_i(x), \quad \Psi^+(x) = \sum_i a_i^+ \psi_i^*(x). \quad (324)$$

Поскольку функции  $\psi_n$  составляют ортонормированный базис, то получаем отсюда

$$a_i^- = \int \psi_i^*(x)\Psi(x) dx, \quad a_i^+ = \int \psi_i(x)\Psi^+(x) dx. \quad (325)$$

Амплитуды  $a_n^-$  и  $a_n^+$  также являются операторами. Волновые функции  $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$ , как функции своих переменных  $x_1, \dots, x_N$ , также можно разложить по базису  $\psi_n(x)$ . При этом удобно перейти к представлению чисел заполнения. Обозначая волновую функцию с числом  $n_i$  как  $|n_i\rangle$ , можно показать, что действие операторов  $a_i^-$ ,  $a_i^+$  выглядит достаточно просто:

$$\begin{aligned} a_i^+ |n_i\rangle &= (n_i + 1)^{1/2} |n_i + 1\rangle, \\ a_i^- |n_i\rangle &= n_i^{1/2} |n_i - 1\rangle. \end{aligned} \quad (326)$$

Оператор  $a_i^+ a_i^- = n_i$  оказывается диагональным, а оператор полного числа частиц равен

$$N = \sum_i a_i^+ a_i^- = \sum_i n_i. \quad (327)$$

До сих пор мы не учитывали временной зависимости волновых функций  $\psi_N$ . На самом деле они удовлетворяют уравнению Шрёдингера, которое в компактной форме записывается как

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (328)$$

где  $\psi$  — столбец из функций  $\psi_N(x_1, \dots, x_N)$ , а оператор Гамильтона дается выражением (323). Символическое решение уравнения (328) имеет вид

$$\Psi = \exp\left(-\frac{iH}{\hbar} t\right) \psi(0), \quad (329)$$

где  $\psi(0)$  — вектор состояния в начальный момент времени.

Уравнения квантованных полей становятся еще красивее, если условиться проводить все усреднения физических величин с весовой функцией  $\psi(0)$ . Тем самым производится переход от представления Шрёдингера к представлению Гейзенберга: волновая функция считается не зависящей от времени, зато все операторы приобретают временную зависимость. Для оператора  $\Psi$  это означает

$$\Psi(t) = \exp\left(\frac{iH}{\hbar} t\right) \Psi_0 \exp\left(-\frac{iH}{\hbar} t\right), \quad (330)$$

где  $\Psi_0$  есть введенный нами ранее соотношениями (314), (315) оператор, не зависящий от времени. Из соотношения (330) находим

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = -[H, \Psi], \quad (331)$$

где квадратные скобки означают коммутатор. Уравнения (330), (331) описывают эволюцию чистого состояния. Они являются полностью обратимыми и не учитывают никакого взаимодействия с внешним миром. Если это взаимодействие сводится лишь к теплообмену со средой и нарушению когерентности состояний, то для описания соответствующих процессов достаточно введения матрицы плотности смешанных состояний. Однако если эти процессы включают в себя неравновесные коллапсы, то ситуация становится более сложной. Каждый из коллапсов можно описать оператором проектирования типа (319). Его можно представить в виде  $P_c = A_c^+ A_c$ , где амплитуды

$A_c, A_c^+$  равны соответственно

$$A_c = \int \psi_c(x) \Psi(x) dx, \quad A_c^+ = \int \psi_c(x) \Psi_c^+ dx. \quad (332)$$

Появление случайных операторов проектирования можно учесть в уравнении (328) дополнительным слагаемым типа  $M\psi$ . После этого обобщенное уравнение Шрёдингера перестает быть обратимым, и соответственно эволюция квантового поля, описываемая соотношениями (330), (331), имеет место только между коллапсами. В общем же случае многих взаимодействующих частиц эволюция квантовой системы становится гораздо сложнее, а главное, она перестает быть обратимой. Необратимость возникает в конечном счете вследствие информационной связи данной квантовой системы с неравновесным внешним миром.

## 48. Кинетика газа

Кинетическая теория классического газа представляет собой вполне законченную область физики. Для описания газа используется уравнение Больцмана, которое решается обычно методом Чепмена–Энскога, т.е. разложением по обратным степеням члена столкновений. Тем самым из уравнения Больцмана выводятся уравнения газодинамики, т.е. уравнения Навье–Стокса. Кинетические коэффициенты этих уравнений вычисляются с помощью уравнения Больцмана. В случае очень резких градиентов, например, имеющих место в ударной волне, вместо уравнений Навье–Стокса можно воспользоваться методом моментов с той или иной процедурой замыкания высших моментов. Такой подход дает вполне удовлетворительные результаты.

Тем не менее, как мы установили в предыдущих разделах, подход к классическому газу с точки зрения квантовой теории позволяет обнаружить и рассмотреть ряд новых тонких эффектов, не описываемых обычным кинетическим уравнением. В этом разделе мы продолжим рассмотрение некоторых эффектов, связанных с квантовомеханической природой атомов или молекул газа. Рассмотрим опять газ с плотностью частиц  $n$  при температуре  $T$  в предположении, что газ является разреженным, так что длина пробега  $\lambda = 1/n\sigma \gg n^{-1/3}$ . Пусть такой газ заключен в кубический сосуд со стороной куба, равной  $L$ . Фазовое пространство одной частицы в таком сосуде имеет  $N_0 = (Lmv_T/\hbar)^3$  ячеек, где  $m$  — масса частицы,  $v_T$  — ее средняя тепловая скорость. А полное число частиц в сосуде равно  $N = nL^3$ . В случае разреженного газа из общего числа ячеек  $N_0$  только очень малая

доля  $\zeta = N/N_0 = n\lambda_B^3 \ll 1$  оказывается заполненной частицами, а большая часть ячеек остается пустой. Как и в более ранних разделах, мы использовали здесь обозначение  $\lambda_B = \hbar/mv_T$  для средней длины волны де Бройля. Таким образом, если газ разрежен, то он оказывается разреженным и в фазовом пространстве. Например, воздух при нормальных температуре и плотности имеет величину параметра  $\zeta \approx 10^{-8}$ . Ясно, что классическая теория в этом случае должна иметь достаточно высокую точность. Тем не менее постараемся понять, к чему приводит квантовое рассмотрение.

Как мы установили выше, волновая функция каждого атома или молекулы газа выглядит, как волновой пакет. Размеры такого пакета в конфигурационном пространстве имеют порядок величины  $b = (\hbar\tau/m)^{1/2} = (\lambda\lambda_B)^{1/2}$ . А по импульсам волновой пакет имеет неопределенность порядка  $\delta p \approx \hbar/b$ . Таким образом, волновой пакет занимает одну ячейку в фазовом пространстве. Соответственно, волновые функции атомов газа заполняют только очень малую долю  $\zeta \ll 1$  от всего фазового пространства. Именно по этой причине волновую функцию всех атомов в единичном объеме можно считать равной произведению (223) индивидуальных функций вида (230), т.е.

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} a(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (333)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор выделенной частицы с некоторым номером  $j$  (т.е.  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_j$ ),  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, а функции  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  представляют собой однотипные огибающие вида

$$a(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2}{2\Lambda^2}\right], \quad (334)$$

где плотность  $n$  считается не зависящей от  $\mathbf{r}, t$ . Таким образом, волновая функция (333) представляет собой сумму волновых пакетов с различными значениями волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Такая сумма получилась из-за неразличимости частиц, так что каждую частицу можно считать распределенной по множеству пакетов (в разреженном газе Ферми и Бозе статистики не отличаются друг от друга). В выражении (334) вектор  $\mathbf{r}_k = (\hbar\mathbf{k}t/m - \mathbf{r}_k^0)$ , где  $\hbar\mathbf{k}/m = \mathbf{v}_k$  представляет собой скорость частицы, вектор  $\mathbf{r}_k$  соответствует центру волнового пакета, а вектор  $\mathbf{r}_k^0 = \mathbf{r}_k(t=0)$ . Величину  $\Lambda^2$  будем считать постоянной, равной  $\Lambda^2 = b^2(1+i)$ , где  $b^2 = \hbar\tau/m$ ,  $\tau$  — среднее время столкновений.

Каждая из амплитуд (334) может включать в себя множитель вида  $\exp(i\varphi_k)$ , где  $\varphi_k$  — произвольная фаза. Если эти фазы случайны, то можно составить произведение  $\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$  и затем произвести усредне-

ние по случайным фазам. При этом мы получим

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{k}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2}{2b^2} \right]. \quad (335)$$

Отсюда видно, что функция  $n|\psi(\mathbf{r})|^2$  играет роль микроскопической функции распределения частиц. Если нас не интересуют флуктуации этой функции в фазовом пространстве, то можно произвести дополнительное усреднение по центрам волновых пакетов, и тогда мы получим обычную функцию распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ .

Нечто подобное такому усреднению можно было бы провести и на более ранней стадии. Для этого рассмотрим все волновые пакеты, имеющие волновые векторы в небольшом объеме  $d^3\mathbf{k}$  вблизи некоторого значения  $\mathbf{k}$ . Все такие пакеты движутся с одной и той же скоростью  $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$ . Поэтому их огибающие удовлетворяют уравнению (231). Теперь мы можем рассмотреть некоторую плавную функцию  $a(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ , которая является общей огибающей для всех волновых пакетов. Такая огибающая в отсутствие столкновений также эволюционирует согласно уравнению

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla a = 0. \quad (336)$$

Естественно, что такая плавная функция  $a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  связана с функцией распределения соотношением  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n|a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|^2$ . Таким образом, уравнение (336) является уравнением свободного движения для амплитуды  $a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , а не для функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Уравнение для последней получается как следствие уравнения для амплитуды: достаточно лишь умножить (336) на  $a^*$  и сложить с комплексно сопряженным уравнением.

Напомним, что плотность  $n$  мы считаем пока постоянной величиной:  $n = \text{const}$ . Составим теперь билинейную комбинацию  $\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}')$ . Если эту комбинацию усреднить по случайным фазам, то мы получим сумму билинейных величин по отдельным волновым пакетам. Если произвести еще дополнительное усреднение по центрам пакетов  $\mathbf{r}_k$ , то мы получим следующее выражение:

$$\langle \psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}') \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \exp \left[ -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4b^2} \right]. \quad (337)$$

Выражение

$$R(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{k}) = \exp \left[ -i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{4b^2} \right] \quad (338)$$

можно назвать матрицей распределения. Как мы видим, матрица  $R$  зависит от двух непрерывных индексов:  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и  $\mathbf{k}$ . Если матрицу распределения усреднить по  $\mathbf{k}$  с максвелловским распределением, т.е. выполнить суммирование по  $\mathbf{k}$  в (337), то мы получим матрицу плотности.

Из этих соотношений видно, что наибольшее количество информации содержится в исходных выражениях (333), (334) для волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$ . При переходе к матрице распределения (338) часть этой информации теряется. Еще больше информации теряется при переходе от матрицы распределения к матрице плотности. Естественно, что при переходе к функции распределения теряется вообще вся квантовая информация.

Учтем теперь столкновения между частицами. Как было аргументировано в разделе 38, столкновения частиц можно описывать как случайный процесс: каждое реальное столкновение уничтожает два налетающих пакета и рождает два новых пакета. При этом сохраняется суммарный импульс и суммарная энергия взаимодействующих частиц. Число частиц тоже сохраняется, но иногда процесс рассеяния удобно считать происходящим в две стадии — сначала уничтожаются две налетающие частицы, а затем рождаются две новые, т.е. рассеянные частицы.

При переходе к рассуждениям с переменной плотностью числа частиц естественно отказаться от принятого ранее ограничения  $n = \text{const}$ . Поэтому вместо нормированной на единицу амплитуды  $a$  введем в рассмотрение величину  $A = \sqrt{\bar{n}}a$ . Это означает, что величину  $A(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  можно считать суммой однотипных огибающих вида  $B \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{k}})^2/2A^2]$ , где нормировочный множитель  $B$  подбирается таким образом, чтобы имело место равенство  $|A(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|^2 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . При такой записи  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  представляет собой микроскопическую функцию распределения. Но если нас не интересуют флуктуации, то мы можем перейти к плавной функции распределения, и тогда под  $A(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  можно подразумевать плавную огибающую всех волновых пакетов с импульсами  $\hbar\mathbf{k} = m\mathbf{v}$ . Огибающая  $A(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  в отсутствие столкновений переносится со скоростью  $\mathbf{v}$ . А при наличии столкновений уравнение для  $A$  может быть записано в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla A = S(A), \quad (339)$$

где  $S(A)$  представляет собой член столкновений.

Введем в рассмотрение операторы рассеяния  $S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ : оператор  $S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  при действии на волновую функцию (333) уничтожает волно-

вой пакет с импульсом  $\hbar\mathbf{k} = m\mathbf{v}$  в окрестности точки  $\mathbf{r}$  (с точностью до ширины пакета) и рождает новый волновой пакет с импульсом  $\hbar\mathbf{k}' = m\mathbf{v}'$  вблизи той же самой точки  $\mathbf{r}$ . Это значит, что  $S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  можно представить в виде произведения оператора уничтожения пакета  $a_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  и оператора рождения  $a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(\mathbf{r})$ . Тогда член столкновений можно представить себе как результат действия произведения двух операторов  $S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(\mathbf{r})S_{\mathbf{k}'_1\mathbf{k}_1}(\mathbf{r})$ . Действие такого оператора на волновую функцию является случайным: оператор дожидается момента времени, когда в окрестности точки  $\mathbf{r}$  окажутся волновые пакеты с импульсами  $\hbar\mathbf{k}, \hbar\mathbf{k}_1$ , а затем он переводит их в новые пакеты с импульсами  $\hbar\mathbf{k}', \hbar\mathbf{k}'_1$ . Вероятности соответствующего рассеяния находятся по правилам квантовой механики. При каждом рассеянии должны соблюдаться законы сохранения  $\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'_1$ ;  $\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}_1^2 = (\mathbf{k}')^2 + (\mathbf{k}'_1)^2$ .

Член столкновений в уравнении (339) представляет собой результат всех рассеяний, в которых принимают участие волновые пакеты с данным импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ :

$$S(A) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \left\{ \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'_1} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} S_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'_1} - \sum_{\mathbf{k}_1} S_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}'_1\mathbf{k}_1} \right\} \psi(\mathbf{r}). \quad (340)$$

Здесь  $\psi(\mathbf{r})$  представляет собой сумму всех волновых пакетов (333), а множитель  $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$  добавлен для того, чтобы выделить амплитуду  $A(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  из результата действия операторов рассеяния на волновую функцию  $\psi(\mathbf{r})$ . Первая сумма в правой части (340) описывает инжекцию волновых пакетов с импульсом  $\hbar\mathbf{k}$  при рассеянии волновых пакетов  $\mathbf{k}', \mathbf{k}'_1$ , а вторая сумма описывает убыль волновых пакетов  $\mathbf{k}$  из-за рассеяния на пакетах  $\mathbf{k}_1$ .

Если не интересоваться флуктуациями, то член столкновений (340) можно усреднить. Для этого достаточно умножить (340) на  $\psi^*(\mathbf{r})$  и провести затем усреднение по случайным фазам и центрам волновых пакетов. При этом получим

$$\langle S(A) \rangle = -\frac{1}{2\tau} A + S_2. \quad (341)$$

Здесь  $1/\tau$  обозначает частоту столкновений частицы со скоростью  $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/m$  с другими частицами:

$$\frac{1}{\tau} = \int W_{\mathbf{v}, \mathbf{v}_1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{v}_1, \quad (342)$$

где  $W_{\mathbf{v}, \mathbf{v}_1}$  — вероятность рассеяния.

А член  $S_2$  описывает инжекцию частиц со скоростью  $v$ , так что

$$A^* S_2 + A S_2^* = \int W_{v v'} W_{v_1 v'_1} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t) dv' dv'_1, \quad (343)$$

где  $v_1 = v' + v'_1 - v$  согласно закону сохранения импульса. Если перейти к упрощенному  $\tau$ -приближению, то согласно (237) уравнение для амплитуды  $A$  можно приближенно записать в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (A - A_0). \quad (344)$$

Здесь  $A_0$  отвечает максвелловскому распределению, так что  $|A_0|^2 = f_0(\mathbf{r}, v, t)$ , где  $f_0$  — локальная максвелловская функция распределения.

Умножая (344) на  $A^*$  и складывая результат с комплексно сопряженным уравнением, можно получить кинетическое уравнение Больцмана (233) с членом столкновений в  $\tau$ -приближении (236). Из этого уравнения можно затем получить уравнения газодинамики с помощью приближенной теории возмущений, т.е. разложением по обратным степеням члена столкновений.

Итак, мы видим, что переход к классике осуществляется путем усреднения квадрата амплитуды  $|A|^2$  волновых пакетов. Рассмотрим теперь задачу о броуновском движении. Пусть броуновская частица выглядит как шарик с радиусом  $R_a$ . Тогда о такую частицу в единицу времени ударяет в среднем  $n4\pi R_a^2 v_T$  атомов. Можно сказать, что величина  $\sigma_a = 4\pi R_a^2$  играет роль поперечного сечения рассеяния атомов газа на броуновской частице конечных размеров.

При описании броуновской частицы возникают два вопроса: как быстро происходит ее диффузионное движение и что происходит с ее волновой функцией. Для описания диффузионного движения крупной броуновской частицы можно использовать классическое кинетическое уравнение. Мы сосредоточим здесь внимание на втором вопросе: как у броуновской частицы появляются свойства классической частицы?

Обозначим через  $\mathbf{R}$  координату броуновской частицы с массой  $M$ . С точки зрения квантовой теории броуновской частице следует приписать волновую функцию  $\Psi(\mathbf{R}, t)$ . Как мы установили в разделе 37, волновая функция точечной броуновской частицы стягивается со временем в волновой пакет с размерами  $\Lambda_a \approx b(m/M)^{1/4}$ . Здесь  $b = \sqrt{\lambda_B \lambda}$  — ширина волновых пакетов атомов газа,  $m/M$  — отношение массы атома к массе броуновской частицы,  $\lambda$  — длина пробега атомов газа. Сечение рассеяния  $\sigma_a$  атома на броуновской частице считается равным  $\sigma$ . Здесь мы опишем броуновскую частицу конечных размеров.



Допустим сначала, что размер броуновской частицы  $R_a$  значительно меньше длины свободного пробега атомов газа  $\lambda$ . Тогда можно воспользоваться рассуждениями раздела 36 с заменой частоты столкновений атомов газа с броуновской частицей на величину  $\sigma_a/\sigma\tau$ , где  $\sigma_a = 4\pi R_a^2$ . Соответственно, для ширины  $\Lambda_a$  установившегося волнового пакета броуновской частицы получаем оценку

$$\Lambda_a \cong b \left( \frac{m\sigma}{M\sigma_a} \right)^{1/4}. \quad (345)$$

Здесь  $b \cong \sqrt{\lambda\lambda_B}$  — ширина волновых пакетов атомов газа.

В другом предельном случае  $\lambda \ll R_a$  рассеяние атома на броуновской частице происходит как отражение от границы макроскопического тела. Как было показано в разделе 30 (см. также рис. 9), волновая функция отраженного атома оказывается запутанной (завязанной) с волновой функцией макротела согласно соотношению (144). При коллапсировании волновой функции отраженного от тела атома на расстоянии  $\sim \lambda$  от границы тела волновая функция макротела испытывает поджатие того же порядка величины, что и при рассеянии атома на броуновской частице малых размеров. Если коллапсы волновых функций атомов, отраженных от границы макротела, считать не зависимыми друг от друга, то мы снова придем к оценке (345).

Если ввести в рассмотрение размер атома  $a_0 \cong \sqrt{\sigma}$ , то соотношение (345) можно записать в виде

$$\Lambda_a \cong \sqrt{\lambda_B a_0} \left( \frac{m\lambda^2}{MR_a^2} \right)^{1/4}. \quad (346)$$

Отсюда видно, что если размер броуновской частицы  $R_a$  достигает величины  $\lambda$ , то ширина локализации ее волнового пакета становится меньше  $\sqrt{\lambda_B a_0} \lesssim a_0$ . При этом броуновскую частицу заведомо можно считать классическим объектом.

По аналогии с броуновской частицей можно рассмотреть газовую частицу. Минимальный размер такой частицы, начиная с которого можно пользоваться представлением о сплошной среде, имеет порядок величины  $\lambda$ . Масса  $M$  такой частицы равна  $M = mn\lambda^3$ . Однако, в отличие от броуновской частицы, газовая частица не может воспринимать как целое импульсы от ударов атомов окружения. При размерах  $\sim \lambda$  такую частицу следует рассматривать скорее как набор невзаимодействующих частиц. Поэтому квантовую неопределенность положения центра масс  $\Delta X = \sum_i \Delta x_i / n\lambda^3$  атомов в объеме  $\lambda^3$  следует оценить как  $\Delta X \sim b(n\lambda^3)^{-1/2}$ . Это выражение можно представить в виде

$\sqrt{\lambda_{\text{В}} a_0} (n a_0^3)^{1/3}$ . Как мы видим, квантовая неопределенность центра масс газовой частицы с размерами  $\sim \lambda$  оказывается значительно меньше размера атома. Поэтому для описания газовых течений с размерами, значительно большими длины свободного пробега, вполне пригодны уравнения газовой динамики.

В разделе 9 мы рассмотрели один из простейших типов коллективного движения, а именно, звуковую волну малой амплитуды. Мы рассмотрим здесь эту волну с точки зрения волновых пакетов атомов газа. Как мы увидим, такой подход дает возможность сочетать классическое и квантовое описание.

Пусть газ занимает объем  $V = L^3$ , так что полное число атомов равно  $N = n_0 L^3$ , где  $n_0$  — невозмущенная плотность. Будем считать, что звуковая волна является стоячей, а колебания газа происходят только вдоль оси  $x$ . Пусть скорость газа вдоль оси  $x$  равна  $u = \sqrt{2} N^{-1/2} \xi \sin(\kappa x)$ . Здесь  $\xi$  является коллективной переменной (она отличается множителем  $N^{-1/2}$  от аналогичной переменной в разделе 9). Волновое число  $\kappa$  считаем подобранным таким образом, чтобы соответствующие граничные условия удовлетворялись.

Пусть колебания плотности в звуковой волне имеют вид  $n = n_0 + \tilde{n}$ . При классическом подходе величину  $\tilde{n}$  можно выразить через  $\xi$  с помощью уравнения непрерывности (34).

Но точно такое же уравнение можно найти с помощью уравнения (339). Для этого достаточно умножить (339) на  $A^*$ , сложить его с комплексно сопряженным выражением и просуммировать все такого рода уравнения по  $\nu$ . Так как  $\sum_{\nu} |A|^2 = n$ ,  $\sum_{\nu} \nu |A|^2 = \mathbf{u}n$ , то мы получим уравнение непрерывности (34). В линейном приближении находим

$$\tilde{n} = -\sqrt{2} N^{-1/2} \kappa n_0 \xi \cos(\kappa x). \quad (347)$$

Как было показано в разделе 9, колебания давления  $\tilde{p}$  связаны с колебаниями плотности  $\tilde{n}$  соотношением  $\tilde{p} = m c_s^2 \tilde{n}$ , где  $c_s$  — скорость звука. Учитывая, что колебания давления происходят по адиабатическому закону  $p \sim n^\gamma$ , нетрудно найти поправку второго порядка

$$p_2 = \frac{2}{3} p_0 \left( \frac{\tilde{n}}{n_0} \right)^2,$$

а стало быть, и локальную энергию  $3p_2/2$ . С помощью полученных соотношений находим полную энергию  $\varepsilon$  звуковой волны:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \kappa^2 c_s^2 \xi^2. \quad (348)$$

Зная выражение для энергии, нетрудно найти уравнение движения:

$$\ddot{\xi} = -\kappa^2 c_s^2 \xi. \quad (349)$$

Это уравнение получено классически. Попытаемся теперь понять, как выглядит его квантово-механический аналог. Для этого воспользуемся волновой функцией  $\Psi$  всех  $N$  атомов. Мы представим ее в виде функции от коллективной переменной  $\xi$ .

В пренебрежении взаимодействием между атомами функция  $\Psi$  выражается в виде произведения (229) всех одиночных функций. Одиночные функции (333) были составлены нами для частного случая  $n = \text{const}$ . Если плотность не постоянна во времени и в пространстве, то более удобными являются функции

$$\psi(\mathbf{r}_j) = \sum_{\mathbf{k}} A(\mathbf{r}_j, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j). \quad (350)$$

Для простоты мы сохранили здесь прежнее обозначение  $\psi(\mathbf{r}_j)$  для функции одиночного атома, но следует иметь в виду, что функции (350) в  $\sqrt{n}$  раз больше, чем функции (333). Разумеется, при вычислении физических величин эта разница в нормировке функций роли не играет.

В пренебрежении взаимодействием между атомами функция  $\Psi$  удовлетворяет уравнению свободного движения

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \Delta_j \Psi. \quad (351)$$

Так как согласно (229) волновая функция  $\Psi$  факторизуется, то уравнение (351) можно рассматривать как укороченную запись уравнения Шрёдингера для индивидуальных функций  $\psi(\mathbf{r}_j)$ .

Оператор  $\Delta_j$  действует на функцию  $\psi(\mathbf{r}_j)$  следующим образом:

$$\Delta_j \psi(\mathbf{r}_j) = \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_j) [-k^2 + 2i\mathbf{k}\mathbf{V}_j + \Delta_j] A(\mathbf{r}_j, \mathbf{k}). \quad (352)$$

Сумму по  $\mathbf{k}$  от второго слагаемого в квадратных скобках можно считать исчезающе малой, поскольку распределение по  $\mathbf{k}$  практически изотропно. Что касается оператора  $\Delta_j$ , то его удобно преобразовать с помощью перехода к новым переменным  $x'_j = x_j - \sqrt{2} N^{-1/2} \xi \sin(\kappa x)$ . Тогда лапласиан  $\Delta_j$  заменится на новый оператор

$$\Delta_j = \Delta'_j + \frac{2 \sin^2 \kappa x}{N} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.$$

Лапласиан  $\Delta'_j$  описывает расплывание волновых пакетов в относительной системе координат, движущейся со скоростью  $u$ . Как мы знаем, такое расплывание компенсируется столкновениями, и поэтому оператор  $\Delta'_j$  можно опустить. После этого сумма  $\sum_j \Delta_j$  в (351) превращается просто в оператор  $\partial^2/\partial \xi^2$  (мы учитываем, что суммирование по  $j$  сводится к умножению на  $N$  и усреднению  $\sin^2 \kappa x$ ).

Обратимся теперь к сумме первых слагаемых в (352). Согласно уравнению Шрёдингера для индивидуальной функции слагаемое  $-k^2$  в правой части (352) приводит к ее временной зависимости вида  $\exp(-i\omega_k t)$ , где  $\omega_k = \hbar k^2/2m = \varepsilon_k/\hbar$ ;  $\varepsilon_k$  — энергия волнового пакета. Пакеты с разными  $k$  имеют разные частоты. Но если выделить некоторый пробный пакет и проследить за ним в течение промежутка времени, значительно большего  $\tau$ , то такой пакет успеет много раз сменить свою энергию. Поэтому его усредненная частота равна  $\langle \varepsilon_k \rangle/\hbar$ , где  $\langle \varepsilon_k \rangle$  — его средняя энергия. При термодинамическом равновесии эта энергия равна  $3T/2$ , в чем можно убедиться с помощью усреднения  $\psi^*(\mathbf{r}_j)k^2\psi(\mathbf{r}_j)$  по набору волновых пакетов с максвелловским распределением по скоростям.

Приближение газовой динамики пригодно только при  $\kappa\lambda \ll 1$ , т.е.  $\tau\kappa c_s \ll 1$ . Поэтому локально газ можно считать термодинамически равновесным. Отсюда видно, что среднее значение суммы  $\sum_j$  в (351) от выражения с первым слагаемым в квадратных скобках в (352) равно просто полной энергии газа. Соответственно, можно выделить энергию звуковой волны, и тогда уравнение для  $\Psi$  относительно коллективной переменной  $\xi$  запишется в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{m}{2} \kappa^2 c_s^2 \xi^2 \Psi. \quad (353)$$

Мы получили квантовый аналог классического уравнения движения (349). Уравнение (353) описывает звуковую волну, которую можно рассматривать как квантованную, но на очень высоком уровне возбуждения.

Представляется достаточно очевидным, что не все решения уравнения (353) могут иметь отношение к классическому газу. И это в самом деле так. Рассмотрим сначала волну минимальных размеров  $L \sim \lambda$  и  $\kappa \sim \lambda^{-1}$ . Согласно (353) при этом неопределенность  $\Delta \xi$  основного состояния имеет порядок величины  $\Delta \xi \sim b = \sqrt{\lambda_{\text{В}} \lambda}$ . Этой величине соответствует неопределенность центра масс  $\Delta X \sim b/\sqrt{N}$ , где  $N \sim n_0 \lambda^3$ . Мы приходим к той же самой оценке, что и при случайном сложении неопределенностей волновых пакетов.

При уменьшении  $\kappa$  и увеличении  $N$  квантовая неопределенность центра масс газовых частиц должна уменьшаться, если считать, что процессы коллапсирования волновых функций атомов приводят в конце концов к коллапсированию волновой функции коллективного движения. Этот эффект можно рассмотреть на примере основного состояния осциллятора, описываемого уравнением (353). Учтем, что волновая функция осциллятора  $\Psi(\xi)$  представляет собой некоторую огибающую, на которую нужно умножить волновую функцию (229). Если бы переменная  $\xi$  не была связана с координатами частиц, то мы получили бы произведение  $\Psi(\xi)$  на волновую функцию атомов (229). Но на самом деле имеет место соотношение  $x_j = x'_j + \sqrt{2} N^{-1/2} \xi \sin(\kappa x)$ , где  $x_j$  — координата частицы с номером  $j$  в лабораторной системе координат,  $x'_j$  — координата в "подвижной" системе координат,  $x \cong x_j \cong x'_j$ . Это значит, что переменные  $x_j$  и  $\xi$  в волновой функции оказываются связанными между собой, т.е. фактически создается запутанное (entangled) состояние. Поэтому коллапсирование индивидуальных волновых функций должно приводить к процессу коллапсирования функции  $\Psi(\xi)$ .

Как мы знаем, волновые пакеты атомов испытывают периодические пульсации во времени. Сразу после коллапса зависимость волновой функции от  $x$  выглядит как  $\exp(-x^2/2b^2)$ , где координата  $x$  отсчитывается от центра волнового пакета. Перед повторным коллапсом зависимость от  $x$  (в среднем) становится равной  $\exp[-x^2/2b^2(1+i)]$ , где  $b^2 = \hbar\tau/m$ . Таким образом, каждый коллапс можно описать в виде умножения волновой функции атома на форм-фактор  $\varphi = \exp[-x^2/2b^2(1-i)]$ .

Рассмотрим некоторое фиксированное значение переменной  $\xi$ . Коллапсы волновых функций при данном  $\xi$  можно считать происходящими в подвижной системе координат. За время  $\tau$  частица с номером  $j$  испытывает смещение вдоль оси  $x$  порядка  $\lambda$ :  $\Delta x'_j \cong \pm \lambda$ . Смещение этой же частицы в неподвижной системе координат равно  $\Delta x_j \cong \Delta x'_j + \sqrt{2} N^{-1/2} \xi \kappa \cos(\kappa x) \Delta x'_j$ . Форм-фактор  $\varphi(x)$  около нового положения  $x_j$  можно представить в виде

$$\exp\left\{-\frac{[x + \sqrt{2} N^{-1/2} \xi \kappa \cos(\kappa x) \Delta x'_j]^2}{2b^2(1-i)}\right\}.$$

В среднем по  $\Delta x'_j$  этот фактор равен

$$\varphi = \exp\left[-\frac{x^2 + 2N^{-1} \xi^2 \kappa^2 \lambda^2 \cos^2(\kappa x)}{2b^2(1-i)}\right]. \quad (354)$$

Как мы видим, у каждого пакета появляется дополнительный множитель, зависящий от переменной  $\xi^2$ . Всего в объеме  $V$  находится  $N$  частиц, так что все пакеты дают вклад, который отличается от (354) отсутствием фактора  $N^{-1}$  и заменой  $2 \cos^2(\kappa x)$  на единицу (в силу усреднения по положениям пакетов). У волновой функции всех атомов (229) форм-фактор  $\Phi$  за время  $\tau$  равен  $\Phi = \varphi^N$ . Поэтому в приближении непрерывного коллапсирования уравнение Шрёдингера для основного состояния следует записать в виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} m \kappa^2 c_s^2 \xi^2 \Psi - \frac{i\hbar N \kappa^2 \lambda^2}{2b^2(1-i)\tau} \xi^2 \Psi + i\gamma \Psi.$$

Здесь слагаемое  $i\gamma \Psi$  добавлено для сохранения нормировки волновой функции  $\Psi(\xi)$ . Подставляя сюда решение в виде  $\Psi = \exp(-i\omega t - \xi^2/2A^2)$  и подбирая  $\gamma$  так, чтобы частота  $\omega$  была чисто действительной, находим величину  $A^2$  для установившегося волнового пакета  $\Psi(\xi)$ . При  $N \gg 1$  получаем приближенно:  $|A|^2 \sim b^2/\kappa \lambda N^{1/2} \ll b^2$ . Как мы видим, столкновения атомов создают очень узкий волновой пакет  $\Psi(\xi)$ .

Если функция  $\Psi(\xi)$  относится не к основному состоянию, то ее удобно отнести к когерентному состоянию, в котором волновая функция локализуется около классической переменной  $\xi = \xi_0 \sin \omega t$ . Вблизи этого классического значения волновая функция имеет локализацию точно такую же, как у основного состояния. Поэтому мы можем повторить в точности то же самое рассмотрение и найти ширину волнового пакета вблизи классической переменной  $\xi$ . Как мы установили выше, эта ширина существенно меньше, чем квантовая ширина основного состояния без столкновений атомов между собой.

Приведенные здесь соображения можно перенести на любые несжимаемые и даже сжимаемые течения и потоки в обычном газе. Таким образом, квантовый хаос в газе, приводящий к пакетизации волновых функций атомов газа, создает условия для классического поведения его макроскопических параметров. Газ превращается в классическую среду. Как неявно мы предполагали, это происходит из-за слабого взаимодействия газа с окружающей средой. Именно это скрытое (мы условились называть его информационным) взаимодействие с окружением превращает газ в необратимую систему со всеми вытекающими отсюда последствиями.

# НЕЛИНЕЙНОСТЬ И САМООРГАНИЗАЦИЯ

Данная глава посвящена рассмотрению некоторых нелинейных процессов в классических сложных физических системах. Речь идет, фактически, об открытых системах, через которые могут протекать потоки энергии и информации (негэнтропии). На простейшем примере конвекции жидкости показано, как может возникать неустойчивость, приводящая при превышении надкритичности к сложному нелинейному поведению, в частности, к странному аттрактору.

В разделах 50, 51 очень кратко затронуты вопросы самоорганизации и развития иерархических структур в сложно организованных физических системах.

В разделе 52 высказаны некоторые соображения о подходе к описанию свободы воли как физического явления.

## 49. Конвекция

До сих пор мы неявно предполагали, что внешнее окружение находится вблизи равновесия. Оказывается, что ситуация в корне меняется при неравновесном внешнем окружении. Физическая система, которая может обмениваться с внешним миром энергией и энтропией, называется открытой. Оказывается, что многие открытые физические системы обнаруживают свойство образования сложных нелинейных структур и процессов. Они так и называются — сложные физические системы, или системы с самоорганизацией.

В качестве простейшего примера необратимого процесса в открытой классической системе при неравновесном внешнем окружении мы рассмотрим конвекцию жидкости в поле силы тяжести. Такая конвекция легко возникает в любом слое жидкости при подогревании ее снизу. За счет теплового расширения более теплые участки жидкости становятся более легкими и архимедовой силой они вытесняются вверх, уступая место более холодным массам. Конвективных течений существует великое множество. Мы рассмотрим здесь лишь один из самых простых примеров конвекции в замкнутом тороидальном сосуде (рис. 34) радиуса  $R$ .

Будем считать, что жидкость в этом сосуде подогревается снизу и охлаждается сверху. Более точно, допустим, что температура стенок равна

$$T_s = T_0 + \frac{1}{2}(T_m - T_0)(1 + \cos \theta),$$

где угол  $\theta$  обозначен на рис. 34. Пусть  $T = T(\theta, t)$  — температура жидкости, усредненная по поперечному сечению кольцевого сосуда. Если через  $\gamma$  обозначить коэффициент теплообмена со стенками сосуда, то для температуры  $T$  можно написать уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\gamma(T - T_s). \quad (355)$$

Жидкость мы считаем слабо сжимаемой, так что скорость  $v$  не зависит от  $\theta$  и может зависеть только от времени. Пусть  $\alpha$  — коэффициент объемного расширения жидкости, так что у ее плотности  $\rho$  появляется добавка  $\delta\rho = \rho\alpha T$ . В поле силы тяжести изменение

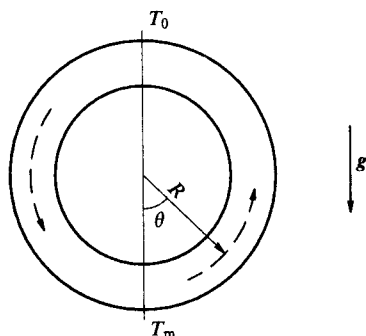


Рис. 34. Жидкость в кольцевом сосуде подогревается снизу нагревателем при температуре  $T_m$ , заметно большей температуры  $T_0$  холодильника в верхней части сосуда. При достаточно большой разнице температур в жидкости возникает конвекция.

плотности приведет к появлению силы  $g\delta\rho$ . Ее проекция на азимутальное направление равна  $-g\delta\rho \cdot \sin \theta = -g\rho\alpha T \sin \theta$ . Если эту силу усреднить по углу  $\theta$ , то мы найдем некоторое ее среднее значение. Именно это усредненное значение и действует на все кольцо жидкости, так что имеем

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -g\rho\alpha \langle T \sin \theta \rangle - \eta v.$$



Здесь последний член с коэффициентом  $\eta$ , пропорциональным вязкости жидкости, учитывает торможение жидкости о стенку.

Усредняя (355) по углу  $\theta$ , найдем, что не зависящая от угла часть температуры  $T$  достигает стационарного значения  $\langle T \rangle = (T_0 + T_m)/2$ . Пусть  $T = \langle T \rangle - T_1 \sin \theta + T_2 \cos \theta$ . Тогда для  $T_1$  и  $T_2$  получаем уравнения

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{v}{R} T_2 = -T_1, \quad (356)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{v}{R} T_1 = -\gamma \left( T_2 - \frac{T_m - T_0}{2} \right). \quad (357)$$

А уравнение для скорости после усреднения по углу  $\theta$  произведения  $T \sin \theta$  записывается в виде

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{g\rho\alpha}{2} T_1 - \eta v. \quad (358)$$

Как мы видим, в системе трех уравнений для переменных  $v, T_1, T_2$  два уравнения (356), (357) являются нелинейными и только (358) линейно. Систему уравнений (356), (357) получил Лоренц [100], обративший внимание на ее весьма любопытные особенности. Обычно уравнения Лоренца записывают в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \sigma(Y - X), & \frac{dY}{dt} &= -Y + rX - XZ, \\ \frac{dZ}{dt} &= -bZ + XY, \end{aligned} \quad (359)$$

где  $\sigma, r, b$  — безразмерные параметры, а величины  $X, Y, Z$  выбираются таким образом, что они пропорциональны, соответственно,

$$v, T_1, T_2 - \frac{T_m - T_0}{2}.$$

Систему уравнений (359) принято называть моделью Лоренца. Ее самое простое решение имеет вид  $X = Y = Z = 0$ . Оно описывает распределение температур в покоящейся жидкости. Но у системы (359) имеется еще одно стационарное решение

$$X_0 = Y_0 = \pm [b(r-1)]^{1/2}, \quad Z_0 = r - 1. \quad (360)$$

Разумеется, это решение существует только при  $r > 1$ . Сравнив второе уравнение системы (359) с уравнением (357), нетрудно заметить, что параметр  $r$  пропорционален разности температур  $T_m - T_0$ .

Таким образом, решение с отличной от нуля скоростью  $v \sim X$  появляется только после того, как разность  $T_m - T_0$  превысит некоторое критическое значение. Стационарная конвекция при этом может идти либо против часовой стрелки ( $v \sim X > 0$ ), либо по часовой стрелке ( $v \sim X < 0$ ). Согласно (360) скорость конвекции пропорциональна корню квадратному из надкритичности ( $r - 1$ ).

Рассмотрим линейное приближение (359), когда переменные  $X, Y, Z$  малы. В этом случае квадратичные члены нужно отбросить, и тогда третье уравнение (359) оказывается не связанным с первыми двумя и описывает затухание  $Z$  со временем. А первые два линейных уравнения имеют решение в виде экспоненты  $X, Y \sim e^{\gamma t}$ . Для инкремента нарастания малых возмущений  $\gamma$  получаем дисперсионное уравнение

$$\gamma^2 + (\sigma + 1)\gamma + \sigma(1 - r) = 0. \quad (361)$$

При  $r < 1$  два корня этого уравнения отрицательны, т.е. малые возмущения затухают со временем. А при  $r > r_c = 1$  одно собственное значение становится положительным, т.е. возникает неустойчивость. Если  $r - 1 \ll 1$ , т.е. надкритичность мала, то одна из мод является медленно изменяющейся со временем: во многих областях физики такие моды называют мягкими. У мягкой моды  $X - Y$  является малой величиной, так что  $Y \approx X$ . Более того, во втором и третьем уравнениях (359) можно пренебречь производными по времени, после чего для  $Y$  и  $Z$  получаем их квазиравновесные значения  $Y = X, Z = b^{-1}XY = b^{-1}X^2$ . С учетом этих приближенных соотношений запишем второе из уравнений (359) в виде

$$F \equiv -\frac{dX}{dt} + (r - 1)X - \frac{1}{b}X^3 = -\frac{dX}{dt} - \frac{dU}{dX} = 0. \quad (362)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение безынерционного движения материальной точки с нулевой массой и координатой  $X$  под действием силы  $F$ , равной вязкому трению  $-dX/dt$ , и силы со стороны потенциала

$$U = -\frac{r-1}{2}X^2 + \frac{1}{4b}X^4 + \text{const}. \quad (363)$$

Согласно (362) "частица" медленно соскальзывает на дно потенциальной ямы  $U$ . Потенциал  $U$  имеет существенно разный вид при  $r < 1$  и  $r > 1$  (рис. 35).

При  $r < 1$  потенциал  $U$  нарастает в обе стороны от  $X = 0$ , так что  $X = 0$  является устойчивым стационарным состоянием. А при переходе параметра  $r$  через единицу в сторону  $r - 1 > 1$  возникает так называемая бифуркация: у "материальной точки" с координатой  $X$

появляется одно неустойчивое и два устойчивых положения, которые соответствуют стационарным состояниям.

Вспоминая, что координата  $X$  пропорциональна скорости жидкости  $v$ , мы можем сказать, что при малой надкритичности возникает стационарная конвекция либо по часовой, либо против часовой стрелки.

Параметр надкритичности  $r$  называют обычно управляющим параметром: он задается извне. Если параметр  $r$  возрастает, переходя через единицу, то жидкость откликается на это неустойчивостью в точке  $r = 1$  и затем самопроизвольным раскручиванием потока, так что  $v \sim (r - 1)^{1/2}$ . Можно сказать, что при  $r < 1$  жидкость не имела никакой информации, связанной с ее движением: жидкость просто покоилась. А при  $r > 1$  у жидкости имеются два равновесных состояния, различающихся знаком скорости вращения. Это значит, что у одной макроскопической степени свободы появилась возможность "запомнить" один бит информации, который при  $r > 1$  устойчиво сохраняется конвекционным течением. Нетрудно видеть, что в рамках рассматриваемых нами макроскопических уравнений один бит информации появляется сразу же при  $r = 1$ , когда скорость течения жидкости еще равна нулю: ведь если уменьшать  $r$  от значений  $r > 1$  в сторону  $r = 1$ , имеющийся у жидкости бит информации будет сохраняться вплоть до значений  $r = 1$ . Можно сказать, что при  $r = 1$  у жидкости появляется "тренд", т.е. намек на возникновение макроскопического параметра порядка  $v$ , и далее при ничтожно малом превышении  $r$  над единицей этот "тренд" превращается в один бит информации. Дальнейшее увеличение  $r$  никак не изменяет информационной емкости нашего конвекционного кольца, рассматриваемого как ячейка памяти: меняется лишь величина скорости  $v$ , т.е. ячейка становится более устойчивой по отношению к помехам.

Вспомним теперь, что реальные жидкости или газы имеют тепловые флуктуации. В частности, и на степень свободы, связанной с

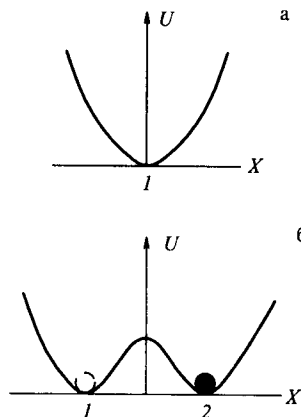


Рис. 35. Зависимость потенциальной энергии  $U$  от  $X$  в случае  $r < 1$  (а) и  $r > 1$  (б). При  $r > 1$  частица в устойчивом стационарном состоянии может находиться только в одном из минимумов  $U$ : (1) или (2).

круговым течением, приходится энергия, равная  $T/2$ . Следовательно, и при  $r < 1$  у нас имеется "трава" из тепловых шумов различных мод. При  $r \rightarrow 1$  мода кругового движения как бы выделяется из других мод: ее амплитуда становится больше, так как затухание уменьшается, а накачка тепловых шумов остается прежней. Вот это-то явление и можно назвать "трендом": амплитуда моды выделяется "ростом среди сверстников". Переход параметра  $r$  через единицу превращает эту надтепловую моду в макроскопическое течение.

Вернемся опять к полной модели Лоренца (359). У нее имеется три стационарных решения при  $r > 1$ , и только два из них (360) устойчивы при небольшой надкритичности. Но что произойдет, если увеличивать параметр  $r$ , не ограничиваясь небольшими его значениями? Первый вопрос — устойчиво ли равновесие (360)? — можно опять рассмотреть с помощью линейного приближения вблизи равновесия. Соответствующий анализ показывает, что существует второе критическое значение  $r_{c2}$ , выше которого происходит вторая бифуркация. Но это еще не все. Оказывается, система уравнений (359) имеет много различных мод движения. Самая удивительная из них была обнаружена самим Лоренцем при значениях параметров  $r = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . Это решение получило название "странный аттрактор". Лоренц обнаружил, что система  $(X, Y, Z)$  совершает сложное хаотическое движение, похожее на "танец" вокруг двух неустойчивых фокусов. Стартуя с любой точки с небольшими  $X, Y, Z$ , система переходит на неустойчивый фокус, вокруг которого она начинает описывать витки с амплитудой, возрастающей со временем, т.е. пробегает траекторию по раскручивающейся спирали. После некоторого количества таких витков система внезапно устремляется ко второму фокусу, вокруг которого она снова описывает витки по раскручивающейся спирали. После нескольких витков, система снова перепрыгивает на первую спираль, чтобы приблизительно повторить то же самое движение. Однако никакой периодичности в таком движении нет: и времена, в течение которых система находится вблизи одного из фокусов, и число витков на каждой из спиралей кажутся совершенно случайными. Хаотическое движение появляется в совершенно детерминированной динамической системе с тремя координатами  $X, Y, Z$ .

Хотя запись уравнений движения в формуле (359) и является самой простой, она не дает наглядного представления, отчего возникает хаотичность. Для этих целей одно из уравнений удобно записать в более сложной форме. А именно, переменную

$$Y = X + \frac{1}{\sigma} \frac{dX}{dt}$$

из первого уравнения (359) подставим во второе и третье уравнения, а затем переменную

$$Z = \frac{1}{b} \left( XY - \frac{dZ}{dt} \right)$$

подставим во второе уравнение. Тогда мы получим уравнение для  $X$ , которое по-прежнему не является замкнутым, но зато имеет очень удобную для качественного анализа форму:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d^2 X}{dt^2} = F = -\frac{1 + \sigma - X^2}{\sigma} \frac{dX}{dt} - \frac{dU}{dX} + \frac{X}{b} \frac{dZ}{dt}. \quad (364)$$

Здесь  $U$  — это тот же самый двугорбый (при  $r > 1$ ) потенциал (363). Как мы видим, без последнего члена уравнение (364) имеет вид уравнения движения материальной точки в потенциальной яме  $U$  с силой трения, пропорциональной  $dX/dt$ , с коэффициентом трения, изменяющим знак с положительного на отрицательный при  $X^2 \geq 1 + \sigma$ . А последний член имеет вид упругой силы с зависящим от времени коэффициентом упругости

$$-\frac{1}{b} \frac{dZ}{dt}.$$

Если производная  $dZ/dt$  не мала, то этот член, будучи зависящим от двух других переменных  $Y$  и  $Z$  со сложным поведением во времени, играет роль переменной вынуждающей силы. Если не учитывать корреляции между  $dZ/dt$  и  $X$ , то последнее слагаемое в (364) выглядит как случайная сила. Другими словами, материальная точка в двугорбой потенциальной яме движется под действием случайной силы, а коэффициент трения может быть как положительным, так и отрицательным. Этим и объясняется качественный характер движения странного аттрактора, хотя для количественного его анализа предпочтительнее вернуться к исходной системе уравнений (359).

Оказывается, что система Лоренца при больших значениях параметра  $r$  имеет в дополнение к странному аттрактору целую серию различных динамических режимов. Мы не будем здесь их обсуждать подробно (см., например, [101]). Отметим только, что все эти решения связаны с конвекцией, а конвекция сама связана с усилением теплового потока от нагревателя к холодильнику. В самом деле, вертикальный тепловой поток  $q$ , рассчитанный на  $1 \text{ см}^2$  поперечного сечения сосуда, равен  $q = cvT \sin \theta$ , где  $c$  — теплоемкость. Усредняя  $q$  по углу  $\theta$ , найдем  $\langle q \rangle = cvT_1/2$ , т.е.  $\langle q \rangle \sim XY$ . Если усреднить (359) по времени, то найдем, что усредненный по времени тепловой поток пропорцио-

нален величине  $b\bar{Z}$ , где черточка над  $Z$  означает усреднение по времени. В устойчивом состоянии  $Z = 0$ , а в режиме с конвекцией приближенно имеем  $\langle \bar{q} \rangle \sim b(r - 1)$ . Другими словами, конвекционное движение прямо связано с усилением теплопереноса, т.е. с увеличением темпа роста  $\dot{S}_e$  энтропии окружения.

Оказывается, что конвекция в модели Лоренца выражает основные общие черты диссипативных нелинейных процессов в приближении небольшого числа параметров порядка. А именно, с ростом неравновесности (т.е. разности  $T_m - T_0$ ) сначала, при некотором критическом значении этого управляющего параметра, появляются сами собой новые ненулевые параметры порядка (в данном случае  $T_1$  и  $v$ ). По мере дальнейшего роста надкритичности эти параметры возрастают, т.е. развивается стационарная бифуркация (360) с соответствующим возрастанием скорости диссипации, т.е.  $\dot{S}_e$ . Затем, при дальнейшем возрастании надкритичности  $T_m - T_0$ , наступает вторая бифуркация, так что параметры порядка  $X, Y, Z$  становятся динамическими переменными сложной нелинейной системы (359). При дальнейшем возрастании  $T_m - T_0 \sim r - 1$  в рамках системы (359) различные моды могут сменять друг друга. А в реальной физической системе могут появляться новые параметры порядка, описывающие более высокие гармоники движения жидкости. По мере роста числа гармоник движение становится все более и более сложным: для простоты его называют просто турбулентным. Такое турбулентное движение вместе с теплопереносом от нагревателя к холодильнику представляет собой сложный сценарий приближения к равновесию в сильно неравновесной системе.

## 50. Самоорганизация

Рассмотренная нами картина конвекции является типичным примером самоорганизации: по мере увеличения параметра неравновесности  $r$  жидкость становится неустойчивой при  $r = 1$ , затем в ней устанавливается стационарная конвекция, а при больших  $r$  возникают различные моды стохастического движения типа странного аттрактора. Существует огромное количество других типов нелинейной самоорганизации, с которыми можно познакомиться по книгам [40, 101 – 105] и цитированной там литературе.

Многие из нелинейных систем настолько красивы, что вполне подходят для украшения интерьеров современных квартир или домов. Вот, например, устройство (рис. 36), которое называется "плазменный шар", его довольно часто можно увидеть в магазинах современных западных городов.

Это, действительно, шар из темного стекла диаметром около полуметра, наполненный светящимися движущимися "змейками". Каждая "змейка" — это плазменное образование типа слабо светящегося шнурового разряда. Этот разряд очень похож на светящиеся образования в обычных неоновых трубках, используемых для ночной иллюминации больших городов. Такой разряд называется тлеющим: он развивается при не очень большом электрическом токе в газе низкого давления. В "плазменном шаре" тлеющий шнуровой разряд развивается между металлическим шаровым электродом, расположенным в центре всего устройства и слабопроводящей металлизированной поверхностью стеклянного шара.

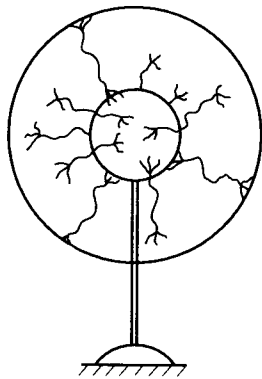


Рис. 36. "Плазменный шар", в котором возникают, поднимаются вверх и там попарно сливаются и исчезают "плазменные змейки" тлеющего разряда.

Каждая "змейка" разряда, а их может быть одновременно до двух десятков, в среднем вытянута в радиальном направлении. Но она, как живая, все время немного изгибается и колеблется, имея несколько периодов изгиба вдоль своей длины. На каждом из своих концов "змейка" имеет своеобразный трезубец, который как маленькая "кошачья лапка", непрерывно шевелится, собирая заряды с соответствующего электрода. "Змейки-разряды" находятся в непрерывном движении. Кроме не прекращающегося извивания, каждая из "змеек" медленно поднимается вверх, очевидно, в результате конвекции. Собираясь в верхнем положении, "змейки" попарно сливаются между собой, и, таким образом, часть из них постоянно исчезает. Напротив, в нижней части устройства непрерывно рождаются новые "змейки", они множатся, расщепляясь надвое, и поднимаются вверх, чтобы там исчезнуть.

Вся эта картина, несмотря на свою сложность, качественно легко может быть понята с физической точки зрения. Разумеется, теоретически гораздо проще представить себе абсолютно симметричный тлеющий разряд между внутренним и внешним электродами. Однако такой разряд неустойчив: из-за разогрева газа и понижения его локальной плотности с соответствующим понижением электросопротивления электрическому току выгоднее протекать по сравнительно узким каналам-трубкам. Разряд распадается на плазменные шнуры.

Будучи более легкими, эти шнуры всплывают вверх под действием силы Архимеда. А взаимодействие шнуров с потоками газа и между собой приводит к образованию сложно организованной картины "змеек", напоминающей мифологическую голову медузы Горгоны. Можно понять, почему на концах каждой "змейки" образуются "кошачьи лапки". Если проводимость электродов невелика, то прямо напротив разряда плотность поверхностного заряда становится меньше и концу "змейки" с противоположным по знаку зарядом удобно расщепиться и перебегать от точки к точке, собирая поверхностный заряд. Таким образом, качественная картина абсолютно понятна и даже немного скучна, а тем не менее плазменный шар завораживает и притягивает к себе кажущейся таинственностью: он похож на живое существо, осуществляющее сознательное движение.

На примере плазменного шара еще раз можно проследить за всеми основными характеристиками и составными элементами самоорганизации. Для того чтобы в системе началась самоорганизация, она должна быть подведена к границе устойчивости. Неустойчивость в данном случае — разбиение разряда на шнуры — начинается лишь с намека (хинта) на появление будущего шнура. На каждый такой хинт достаточно лишь одного бита информации. По мере увеличения внешнего параметра неравновесности, в данном случае силы тока, происходит реальное образование шнуров. Исходная сферическая симметрия нарушается: можно сказать, что происходит самопроизвольное, или спонтанное, нарушение симметрии. Далее, по мере разогрева газа в шнурах в игру вступает конвекция, т.е. следующая бифуркация с появлением нового параметра порядка — газодинамической скорости. Появление "кошачьих лапок" на торцах каждой "змейки" — это еще одна бифуркация со своим механизмом неустойчивости. А в целом образуется сложная нелинейная физическая система с хаотическим типом движения. Для того чтобы это движение поддерживалось длительное время, система должна быть открытой: через плазменный шар нужно непрерывно пропускать электрический ток от внешнего источника. Более того, этот источник энергии должен поставлять энергию в достаточно упорядоченном виде: по терминологии Бриллюэна в систему должна "впрыскиваться" негэнтропия, т.е. энтропия с обратным знаком.

Поясним, что это означает, на примере плазменного шара. Как мы видим, "змейки" существуют только вследствие локального разогрева газа внутри шнурового разряда. Другими словами, внутри шнура газ должен подогреваться, а в целом все устройство находится при комнатной температуре, т.е. избыточное тепло передается в воздух через стеклянную оболочку. Если есть поток тепла, то это означает



рождение энтропии. Плазменный шар превращает часть хорошо организованной электрической энергии в тепло, которое рассеивается затем в окружающем пространстве. Внутри шара все время рождается энтропия, которая вытекает затем вместе с теплом в окружающее пространство. Если "запереть" поток энтропии, то и плазменный шар "умрет". Из плазменного шара все время нужно удалять "шлак" из вновь рождаемой энтропии: образно говоря, в него нужно вводить энтропию с обратным знаком. Если энтропия — это мера беспорядка, то энтропия с обратным знаком — негэнтропия — это мера упорядочения.

Итак, для самоорганизации необходимы два элемента "питания" — энергия и негэнтропия. Только их сумма и может обеспечить стационарное поддержание структуры нелинейной диссипативной системы. Такие системы принято называть сложными открытыми физическими системами.

Чтобы еще более наглядно представить себе картину потоков энтропии (или информации), рассмотрим упрощенную схему на рис. 37. На этом рисунке горизонтальная ось отмечает абсолютный максимум энтропии системы  $M$  при ее изоляции от внешнего мира, а по оси ординат отложена внутренняя энтропия  $S_i$  с обратным знаком, т.е. негэнтропия. Если система выведена из положения устойчивого равновесия, то негэнтропия поднимается на уровень  $S_0$ . При монотонно протекающих процессах релаксации (рис. 37а) негэнтропия системы плавно соскальзывает вниз, как бы "падая" в сторону "силы тяжести". Однако протекающий таким образом процесс релаксации — это довольно редкое явление. Например, если в совершенно одно-

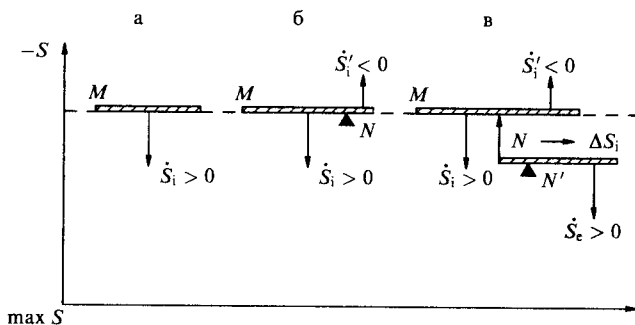


Рис. 37. Схематическое изображение потоков энтропии в неравновесной системе  $M$ : а — монотонное возрастание внутренней энтропии  $S_i$ ; б — при наличии связей  $N$  часть энтропии  $S_i'$  убывает на общем фоне возрастания энтропии  $S_i$ ; в — если есть отток энтропии во внешнюю систему, то убывание части энтропии системы  $S_i'$  может обеспечиваться за счет негэнтропии (информации) внешней среды.

родном газе функция распределения частиц по скоростям возмущена одинаково во всех точках, то мы получим быстрое "соскальзывание" типа рис. 37а. Однако если такого типа возмущение не однородно по пространству, то картина резко меняется. Столкновения максвеллизируют функцию распределения только локально: локально равновесные параметры порядка плотность, скорость и температура эволюционируют далее по законам газодинамики. Столкновения в этом случае даже препятствуют быстрой релаксации к равновесию: чем чаще столкновения, тем меньше кинетические коэффициенты диссипации. На рисунке 37б этот вариант отмечен как диссипация со связью  $N$ , которая не дает равномерно опускаться уровню энтропии. Мы получаем как бы "рычаг", большое плечо которого опускается вниз, а малое может подниматься вверх. Другими словами, опускание вниз "центра тяжести" сопровождается подъемом вверх малой части системы: по ряду степеней свободы происходит рост упорядочения, т.е. имеет место самоорганизация.

На рисунке 37в показан более сложный сценарий самоорганизации, когда второй рычаг со связью  $N'$  не дает опускаться негэнтропии нашей системы за счет потока энтропии во внешний мир. Мы получаем открытую систему, упорядочение которой обеспечивается ростом энтропии  $S_e$  внешнего мира.

Вытекающая из системы  $M$  энтропия  $\Delta S_i$  — это либо частично, либо в основном тепло. Это значит, что поток энтропии сопровождается потоком энергии. А следовательно, для поддержания стационарного состояния самоорганизованной системы  $M$  недостаточно просто отводить избыточную энтропию: на вход этой системы следует подавать энергию. Подводимая к системе энергия должна быть более организованной по сравнению с теплом: энтропия на единицу этой энергии должна быть меньше, чем  $T_e^{-1}$ , где  $T_e$  — температура окружающей среды. Другими словами, нужна совместная подпитка системы как энергией, так и негэнтропией.

На Земле самым мощным источником как энергии, так и негэнтропии является солнечная энергия. Именно она и приводит в действие механизмы самоорганизации в атмосфере, океане и биосфере Земли.

## 51. Иерархические системы

Термин "иерархическая система" напоминает нам нечто из области бюрократии. И в самом деле, именно по принципу иерархической организации построена любая управленческая структура, будь то правление малого предприятия, министерство или государство в целом. Принцип такого построения показан на рис. 38.

Во главе управленческой структуры находится одно лицо  $M$ , которое принимает окончательные решения по самым главным вопросам предприятия  $D$ . Между  $M$  и  $D$  находится промежуточный уровень управления (таких уровней может быть несколько). Уровень  $C$  отчитывается перед  $M$  о принимаемых решениях, воспринимает его указания и управляет подразделениями предприятия  $D$ , чтобы обеспечить его оптимальное функционирование.

Рисунок 38, казалось бы, очень далек от обсуждаемых нами физических систем. Однако это не так: в сложных открытых физических системах могут появляться тенденции к их расчленению на информационные и динамические подсистемы по некоторой аналогии с рис. 38. Поясним, в чем тут дело. Напомним, что открытая физическая система построена по принципу рис. 39. Открытая система  $X$  получает извне некоторую упорядоченную энергию с мощностью  $P$  и потоком негэнтропии  $(-\dot{S}_i)$ . Если, например, температура системы  $X$  равна  $T$ , а поступающая энергия имеет энтропию, которую можно охарактеризовать эффективной температурой  $T_{\text{eff}}$ , то поток негэнтропии равен  $-\dot{S}_i = P(T_{\text{eff}}^{-1} - T^{-1})$ .

Необратимые процессы внутри системы  $X$  приводят к рождению энтропии, причем небольшая часть поступающей в систему негэнтропии расходуется на поддержание и совершенствование внутренней структуры системы  $X$ . Рожденная в системе  $X$  энтропия  $\dot{S}_e$  вместе с избыточной массой выбрасывается наружу в виде отходов.

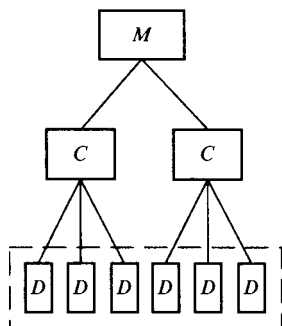


Рис. 38. Иерархия управленческой структуры:  $M$  — глава организации;  $C$  — руководители департаментов;  $D$  — отделы предприятия.

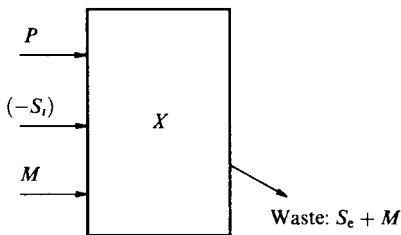


Рис. 39. Открытая система  $X$  получает извне энергию с мощностью  $P$  и может получать вещество с темпом  $M$ . Энергия должна поступать в организованной форме, так что вместе с энергией в систему вводится негэнтропия  $(-\dot{S}_i)$ . Из системы  $X$  во внешнее окружение выбрасываются отходы, которые производят "тепловое загрязнение" среды в виде возрастания внешней энтропии с темпом  $\dot{S}_e$ ; в отходы включается и протекающая через систему масса с темпом  $M$ .

Если система  $X$  имеет не очень сложную внутреннюю структуру, то она может вести себя как однородная динамическая (механическая) система. Например, горная река получает массу (воды) и упорядоченную потенциальную энергию от таяния ледников. С точки зрения гидродинамики, и у нее нет внутренней структуры, обладающей памятью, если мы не интересуемся временным развитием ущелья или долины реки.

Однако в более сложных системах со сложно организованной внутренней структурой возможно расслоение единой системы на две тесно связанные друг с другом подсистемы. Одну из них мы по-прежнему можем называть динамической или силовой, а вторую можно назвать информационной или управляющей подсистемой. Такая возможность появляется в силу большой сложности "фазового портрета" системы. Если описывать систему некоторыми параметрами порядка, т.е. обобщенными координатами  $Q_i$ , то временная эволюция  $Q_i$  может оказаться очень сложной в силу нелинейных связей между  $Q_i$ . Соответственно, траектория  $Q_i$  в фазовом пространстве может оказаться очень чувствительной к малым возмущениям, обладая многими точками бифуркации. В этих условиях фазовая точка может легко перебрасываться с одной траектории на другую малыми внешними возмущениями или малыми изменениями в структурных элементах системы.

Те структурные элементы, которые могут сильно влиять на динамику системы сравнительно малыми возмущениями (сигналами), естественно выделяются в структуру управления. Таким образом, сложные динамические системы сами собой могут расслаиваться на два уровня иерархии, как показано на рис. 40.

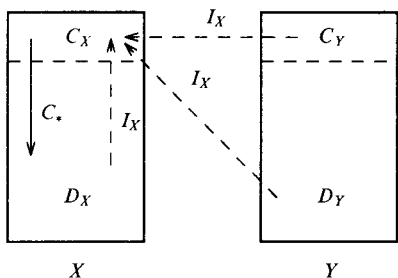


Рис. 40. Иерархические системы  $X$ ,  $Y$  состоят из динамических подсистем  $D_X$ ,  $D_Y$  и подсистем управления  $C_X$ ,  $C_Y$ . Каждый из "блоков управления", например  $C_X$ , получает информацию о своей динамической подсистеме и других системах и на основе этой информации формирует сигналы управления  $C_X$  для  $D_X$ .

Рассмотрим, например, систему  $X$ . В ней выделены два иерархических уровня: подсистема управления  $C_X$  и динамическая подсистема  $D_X$ ;  $C_X$  — это тоже динамическая система, но более "деликатная" по сравнению с  $D_X$ . Блок  $C_X$  может "работать" с гораздо более слабыми процессами обмена энергией, т.е.

фактически с "сигналами". Если подсистема  $C_X$  организована достаточно сложно, то она может откликаться не на интенсивности приходящих сигналов, а на их форму, т.е. "смысловую часть". Другими словами,  $C_X$  становится информационной системой, а ее сложная внутренняя организация позволяет создать "тезаурус", т.е. набор внутренних архивов, который позволяет производить "процессинг" приходящей информации с выработкой управляющих сигналов, адресованных динамической подсистеме  $D_X$ . Иерархические системы типа рис. 40 мы условимся называть системами с информационным поведением.

Рассмотрим теперь две системы с информационным поведением  $X$ ,  $Y$ , как показано на рис. 40. Высокочувствительный блок  $C_X$  может воспринимать сигналы не только от своей динамической подсистемы  $D_X$ , но и от подсистем  $C_Y$ ,  $D_Y$  второй системы  $Y$ . Соответствующие сигналы должны переносить информацию, т.е. необходимая негэнтропия также должна быть поставлена откуда-то извне. Блоки  $C_X$ ,  $C_Y$  могут при этом либо пользоваться частью той негэнтропии, которая поступает в блоки  $D_X$ ,  $D_Y$ , либо они могут пользоваться другими потоками негэнтропии, которые существуют в неравновесном внешнем мире. Если иметь в виду живые организмы, то источником негэнтропии для подсистем  $D$  служит пища, а для получения информации может использоваться свет, воспринимаемый органами зрения.

Для любой системы  $X$  в качестве второй системы  $Y$  может выступать весь внешний мир. В этом случае речь должна идти о "погружении" данной системы во внешний мир и ее адаптации к энергетическим и информационным потокам неравновесного мира. Именно для систем с информационным поведением важна та взаимосвязь между динамическими и информационными процессами, которая обсуждалась в предыдущих разделах статьи.

Следует отметить, что для информационного поведения сложных физических систем более важной является структурная сложность и структурная иерархия, а не иерархия элементарных уровней (частицы, атомы, молекулы, тела). Элементы информационного поведения появляются даже у микрочастиц в виде коллапсов волновых функций, а по мере укрупнения и усложнения структур к ним добавляются неравновесные коллективные параметры порядка, играющие роль динамических переменных. Коллапсы волновых функций и бифуркации динамических переменных вблизи точек ветвления выглядят как свободные поступки, т.е. как проявление свободы воли. Благодаря этому у Природы в целом появляется возможность свободного развития, которое реализуется в структурном усложнении и развитии ее составных элементов — сложных физических систем.

## 52. Свобода воли

Опираясь на изложенное выше, мы можем обсудить еще один вопрос. А именно, постараемся понять, как, оставаясь в рамках физики, можно подступиться к объяснению феномена свободы воли. Под свободой воли будем понимать здесь свободу действий, или свободный выбор между двумя или несколькими альтернативами. Принято считать, что человек, безусловно, обладает свободой воли, будучи свободным в своих поступках. Разумеется, человеку часто приходится совершать вынужденные поступки под давлением внешних обстоятельств, однако и в этом случае последний выбор остается за ним.

Не факт, что абсолютно все примут данные утверждения за истину. Следуя, например, Шопенгауэру, можно было бы утверждать, что человек анализирует только хотения, а самый последний момент принятия решения может выпадать из-под его контроля. Другими словами, его волевые действия могут быть навязаны извне.

Однако мы будем оставаться на более наивной точке зрения, полагая, что человек свободен в своих поступках и поэтому ответствен за них. Но принимая свободу действий для человека, мы не должны обижать и животный мир. С античных времен до нас дошел парадокс буриданова осла: осел, находящийся в точности между двумя охапками сена, должен умереть с голода, поскольку он не сможет решить, с какой охапки начать трапезу. Все мы знаем, что этого не произойдет, и осел без всяких затруднений выберет одну из охапок сена. Но логический парадокс все же есть. Самое простое его решение основано на малых возмущениях: случайный ветерок может донести более сильный запах от одной из охапок и этого достаточно, чтобы осел сделал свой выбор. Но, опираясь на наблюдения за животными, можно утверждать, что осел и так свободен сделать свой выбор без всякой связи с внешней мотивацией: ему достаточно только знать о существовании обеих охапок сена.

Более того, любое животное только потому и живо, что ему то и дело приходится принимать решения, как прокормиться самому и не стать пищей для хищника. Чем более высоко развит данный вид, тем более широкий спектр решений приходится принимать его представителям. Но никак нельзя принять допущение, что свобода действий появляется скачком на некотором уровне развития: даже у самых примитивных представителей животного мира сохраняется свобода действий. Более того, очень трудно представить себе рубеж появления свободы воли на границе между неодоушевленным миром и жизнью. Гораздо более естественным является допущение о том, что свобода воли является имманентным, т.е. внутренне присущим свойством

всего мира. Только на основе этого исходного положения можно уйти от бессмысленного, полностью детерминированного механистического мира к миру живому и развивающемуся.

Итак, примем, что мир в целом обладает свободой воли, т.е. способностью принимать решения и свободно действовать в рамках тех ограничений, которые накладываются на него законами физики, в том числе классической физики. Эта свобода действий реализуется в виде огромного набора малых свободных актов и каждый из них должен укладываться в рамки физических законов. Это значит, что свобода действий может реализовываться только в точках бифуркации, когда законы механики и физики допускают неоднозначное развитие процесса. Рассмотрим сначала классическую физику. Типичным примером соответствующей бифуркации служит рис. 156, где показано неустойчивое положение материальной точки на вершине "холма" между двумя потенциальными ямами. Из-за неустойчивости начального состояния материальная точка "скатится" в одну из ям. Произойдет спонтанное нарушение симметрии. Соответствующий процесс можно рассматривать как результат эволюции под действием начального возмущения. Само это возмущение можно рассматривать как совершенно случайное, не связанное ни с какими причинами. Но тогда совершенно эквивалентным образом можно сказать, что мир в целом (включая множество мелких связей, т.е. возмущения) "принял решение" о данном спонтанном нарушении симметрии. Аналогичным образом случайные бифуркации можно рассматривать как произошедшие беспричинно и спонтанно, т.е. если бы они были приняты "волевым образом" извне данной системы.

Перейдем к микромиру. В системах многих частиц тоже могут происходить крупномасштабные бифуркации. Но гораздо больший интерес представляют самые малые бифуркационные переходы, т.е. коллапсы волновых функций. Возникает естественный соблазн рассматривать коллапсы как своего рода микронеустойчивости. Можно было бы предположить, что волновая функция, распавшаяся на некогерентные части, является неустойчивой, и частица предпочитает оказаться в одном когерентном субпакете. Такой подход близок к идеологии скрытых параметров, и вряд ли он может служить базой для полного понимания микропроцессов. Более того, нетрудно привести контрпример, который противоречит этому допущению. А именно, если мы опять разделим одну волновую функцию по двум потенциальным ящикам, затем подогреем их, то когерентность между двумя частями волновой функции разрушается. Произойдет коллапс волновой функции в один из ящиков, и именно там окажется частица. А перепрыгнуть из одного ящика в другой частица не может.

Поэтому более логичным представляется предположение, что волновая функция является всего лишь "показателем намерений", как это было аргументировано в разделе 12. Еще более четко это видно в формализме Швингера, когда вводятся символы измерения. Эти символы — всего лишь возможности или намерения у частицы проявить то или иное значение физической величины. Реальная физическая величина появляется лишь при измерении или самоизмерении, когда происходит коллапс намерения, т.е. коллапс волновой функции, сопровождаемый коллапсом вероятностей, а при измерении — записью соответствующей величины в измерительном приборе.

Если вернуться к разделу 24, то можно еще раз убедиться в том, что временная эволюция вектора состояния, т.е. волновой функции, естественно вписывается в формализм эволюции во времени символов измерения. Несколько утрируя ситуацию, можно сказать, что вся квантовая теория представляет собой формализм для описания временной эволюции намерений микромира. Даже в квантовой теории поля операторы эволюционируют во времени лишь для того, чтобы иметь возможность действовать на неподвижный вектор состояния — квинтэссенцию намерений микромира.

Теперь мы можем понять на качественном уровне, как эволюционирует наблюдаемая нами земная природа. Наиболее общий подход к описанию атомов, молекул и поля, из которых состоит наблюдаемое нами окружение, основан на использовании волновой функции  $\psi$ , т.е. вектора состояния, который подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi + M\psi. \quad (365)$$

Здесь  $H$  — оператор Гамильтона, а  $M$  — оператор коллапсов. В отсутствие коллапсов уравнение (365) описывало бы эволюцию чистого состояния для всего вещества Земли, включая биосферу. При этом

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)\psi(0), \quad (366)$$

где  $\psi(0)$  — начальный вектор состояния. Вместо  $\psi(t)$  можно использовать представление Гейзенберга, т.е. ввести операторы, зависящие от времени. Эти операторы действуют на неподвижный вектор состояния  $\psi(0)$ . Все соотношения при этом имеют лоренц-инвариантный вид.

Однако  $\psi(0)$  имеет загадочный вид, и для описания реально протекающих процессов с учетом теплового движения приходится прибегать к дополнительному статистическому усреднению. Такое



усреднение на самом деле неявно предполагает наличие коллапсов, которые из чистого состояния создают смешанный ансамбль. Если не прибегать к статистическому усреднению, но принять факт существования коллапсов, то оператор  $M$  следует считать случайным, поскольку он является аналогом набора беспричинных волевых актов. Естественно, что и вектор состояния  $\psi(t)$  становится случайной величиной.

Естественно считать, что коллапсы  $M$  осуществляют также неравновесную и необратимую эволюцию системы. Особенно ясно это видно в процессах, аналогичных измерениям, когда коллапсы волновых функций сопровождаются коллапсами вероятностей и регистрацией значений измеряемых величин. Как было показано в предыдущих разделах, негэнтропия коллапсирующей системы при этом должна возрастать за счет возрастания энтропии окружения. Ясно, что это может происходить только в неравновесной системе. На Земле самым мощным источником неравновесности является солнечное излучение, поэтому темп коллапсов (вектора состояния и вероятностей) частично связан с потоком негэнтропии от Солнца.

Но коллапсы волновых функций могут и не сопровождаться коллапсом вероятностей, например при тепловом движении. Тем не менее и в этом случае окружение играет не последнюю роль. Ситуация здесь сходна с молекулярным хаосом. Как мы видели, даже слабая связь с внешним миром существенно меняет эволюцию системы многих частиц: в замкнутой системе имеет место обратимое уравнение Лиувилля, а при связи с окружением обратимость во времени исчезает. Сходная ситуация возникает и в квантовом случае: замкнутая система эволюционирует как чистое состояние, а связь с внешним окружением нарушает когерентность и приводит к коллапсам.

Структура уравнения (365) подсказывает, что реальная физическая система включает одновременно причинно-следственную лоренц-инвариантную эволюцию вектора состояния, т.е. эволюцию "намерений", и случайную "волевою" последовательность действий, т.е. коллапсов  $M$ . Коллапсы волновых функций на Земле могут происходить как сами по себе, т.е. спонтанно, так и в результате прямой или косвенной связи с коллапсами квантов солнечного излучения в каскадах их превращений в тепловое движение атомов и молекул. В последнем случае темп коллапсов (абсолютная величина нелинейного оператора  $M$ ) определяется неравновесностью, т.е. уровнем потока негэнтропии. Оператор коллапсов может быть лоренц-неинвариантен. Он действует, в основном, в предпочтительной системе координат, жестко связанной с Землей. В покоящейся системе коррелированных частиц оператор коллапсов действует одновременно по всему прост-

ранству, т.е. мгновенно по "абсолютному времени"  $t$  с точностью до постоянной времени процесса  $\tau$ . В подвижных коррелированных системах частиц, не изолированных от окружения, оператор коллапса действует последовательно по  $t$  на мировой линии фазовой скорости центра масс.

Итак, даже с точки зрения микроскопического строения вещества и поля следует различать причинно-следственный и "волевой", т.е. спонтанно действующий, аспекты эволюции мира. Без коллапсов нарушение когерентности отдельных частей волновой функции привело бы к ветвящемуся сценарию развития мира: согласно Эвретту III [24] можно представить себе много параллельно развивающихся миров. Но на самом деле мы живем в одном единственном мире: спонтанно происходящие "волевые" коллапсы создают одну единую и неповторимую линию эволюции и развития мира. Добавление макроскопических бифуркаций, не меняя качественной картины, существенно расширяет диапазон возможных сценариев, из которых история выбирает один-единственный.

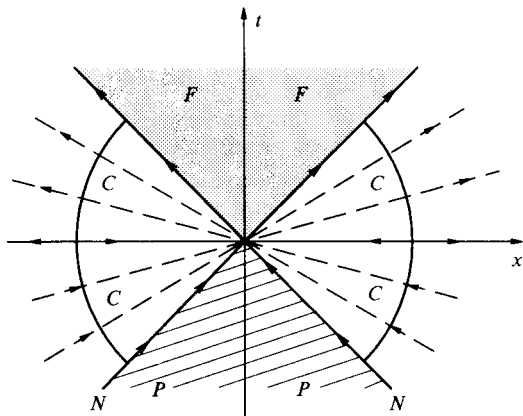
Вернемся опять к проблеме прошлого, настоящего и будущего, но уже в предположении о возможности распространения сверхсветовых сигналов вследствие коллапсов волновой функции. Выберем систему координат, связанную с Солнечной системой. Основную массу вещества в такой системе координат можно считать покоящейся, поскольку перемещения всех макротел происходят в ней со скоростями, существенно меньшими скорости света. Время  $t$  такой системы условимся считать "абсолютным". Тогда для одномерного движения упрощенный график прошлого, настоящего и будущего для частицы в точке  $x = 0$ ,  $t = 0$  выглядит так, как показано на рис. 41. На этом рисунке заштрихованная область  $P$  соответствует прошлому: наблюдатель в точке  $x = 0$ ,  $t = 0$  имеет возможность получить сигналы на материальных носителях (волны, частицы) из всей этой области. Граница  $N$  этой области соответствует настоящему: это то, что наблюдатель в точке  $x = 0$ ,  $t = 0$  видит в свете вокруг себя, включая звезды далеких галактик. Все, что находится вне  $P$  — это будущее: если равномерно двигаться вдоль оси  $t$ , то рано или поздно любая точка вне  $P$  пройдет через "настоящее", т.е. движущуюся границу  $N$ . Однако это будущее естественно разделяется на две области  $F$  и  $C$ .

Область  $F$  — это динамическое, т.е. активное, будущее для точки  $x = 0$ ,  $t = 0$ : наблюдатель в этой точке имеет возможность активно повлиять на события в  $F$  с помощью сигналов на материальных носителях. А область  $C$  — это пассивное будущее. Оно рано или поздно пересечет "настоящее"  $N$ , но повлиять на него материальными сигналами наблюдатель в точке  $x = 0$ ,  $t = 0$  не может. Верно и

обратное утверждение: никакой объект в области будущего  $S$  не может послать в точку  $x = 0$ ,  $t = 0$  сигнал на материальном носителе. Другими словами, в рамках динамических взаимодействий точки области  $S$  не могут находиться в причинно-следственной связи с точкой  $x = 0$ ,  $t = 0$ .

Допустим теперь, что квантовые коллапсы происходят таким образом, что они за счет квантовых корреляций "запутанных" состояний могут переносить сверхсветовые сигналы, т.е. допустим возможность "квантовых телеграфов". Тогда коллапсы на частицах с дорелятивистскими скоростями будут отвечать "мгновенной",  $V = \infty$ , передаче сигнала, что отмечено двусторонними стрелками на оси  $x$ . Штриховые линии на рис. 41 соответствуют движущимся телам, у которых скорость сигнала  $V' = \infty$  в их собственных системах координат. Если волновые функции частиц этих тел имеют корреляционные связи с внешним окружением, то возможно лишь то направление распространения управляющих (т.е. переносящих информацию) сигналов, которое отвечает возрастанию "абсолютного времени"  $t$ . Соответствующие направления отмечены стрелками на штриховых линиях рис. 41.

Разумеется, мы можем представить себе движущееся тело, абсолютно изолированное от внешнего мира, в том числе и информационно изолированное. Если в этом теле протекают неравновесные необратимые процессы, то в нем должны происходить и коллапсы волновых функций. В этом случае нам достаточно лишь связать систему

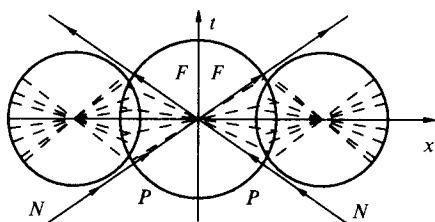


**Рис. 41.** График прошлого, настоящего и будущего для покоящейся точки  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Заштрихованная область  $P$  покрывает собой прошлые события, ее граница  $N$  соответствует настоящему. Область  $F$  — это динамическое будущее: точка  $x = 0$ ,  $t = 0$  может быть причиной для событий в этой области. В областях  $C$  возможна информационная связь с другими точками пространственных интервалов: сплошная линия  $t = 0$  соответствует коллапсам в "абсолютном времени", а штриховые линии отвечают коллапсам в движущихся телах, информационно связанных с основным покоящимся телом. Стрелки указывают возможные направления сигналов управления. Сверхсветовая связь возможна только в необратимых системах при  $|x| < ct$ , где  $t$  — характерное время релаксации.

координат рис. 41 с движущимся телом, и все остальные рассуждения будут перенесены в новую систему координат. Другими словами, полная лоренц-инвариантность включает в себя информационную изолированность системы.

Область  $C$ , где возможна двухсторонняя сверхсветовая связь, является ограниченной как по  $t$ , так и по  $x$ . А именно, в случае необратимой системы с характерным временем релаксации  $\tau$  размер области  $C$  составляет величину  $\sim \tau$  по оси  $t$  и величину  $\sim c\tau$  по оси  $x$ . Второе ограничение связано с тем, что для сверхсветовой коммуникации требуется создание "линии связи", например пучка атомов, находящихся в корреляционной связи с электронами, в случае устройства рис. 27. За время  $\tau$  такую подготовку "линии связи" можно осуществить на длине не более чем  $c\tau$ .

За пределами области  $C$  при  $t < |x|/c$  сверхсветовую связь осуществить невозможно, хотя и здесь могут существовать квантовые корреляции. Невозможность такой коммуникации установлена, как было изложено выше, в работах Бусси [94], Гирарди, Римини, Вебера [93] и Шимони [95] (см. соотношение (291)). Необратимая система с временем релаксации  $\tau$  играет в этом случае роль измерительного прибора. Область  $C$  при этом соответствует области самого измерения,



**Рис. 42.** Необратимые системы с временем релаксации  $\tau$  могут частично перекрываться между собой на плоскости  $x, t$ . При этом возникает возможность для эстафетной сверхсветовой коммуникации на расстояниях, больших  $c\tau$ . Необходимым условием для этого является существование открытых релаксирующих систем (напоминающих живые организмы).

а все, что находится за пределами области  $C$ , соответствует пространственно-временной области между измерениями.

Если имеется много релаксирующих систем, то появляется возможность эстафетной сверхсветовой связи на расстоянии, значительно больших  $c\tau$  (рис. 42). При этом каждая из систем может напрямую обмениваться информацией только с соседней системой. Но поскольку эта связь сверхсветовая, то в отличие от связи на световых сигналах, она не обязана быть сильно запаздывающей, даже если речь идет о далеко разнесенных системах. Им достаточно лишь быть связанными с цепочкой перекрывающихся релаксирующих систем. Такие связанные релаксирующие системы напоминают живой организм.

налах, она не обязана быть сильно запаздывающей, даже если речь идет о далеко разнесенных системах. Им достаточно лишь быть связанными с цепочкой перекрывающихся релаксирующих систем. Такие связанные релаксирующие системы напоминают живой организм.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теперь мы можем подвести краткий итог, хотя бы части из того, что было сказано выше.

При школьном знакомстве с механикой невольно создается представление об этой области физики, как о точной науке, имеющей дело с набором четко поставленных и точно решаемых изящных динамических задач. По крайней мере, именно так механика обычно и преподается. Из такого представления о механике довольно естественно вытекает механистический подход к другим явлениям в физике, и кажется вполне оправданным лапласовский детерминизм: достаточно, казалось бы, найти силы, действующие между отдельными телами, и тогда по начальным условиям можно предсказать эволюцию Мира. Мы знаем, что Природа устроена и развивается более сложным образом. Но, может быть, еще не очень широко стало известно, что и в самой механике взгляды существенно изменились за последние несколько лет.

Оказалось, что все точно решаемые, так называемые интегрируемые задачи принадлежат к классу специально подобранных сильно упрощенных задач. Бóльшая же часть механических систем не интегрируема. Это не просто неумение найти решение в конечном виде, а факт сложного поведения динамической системы, поведения, похожего на хаотическое, случайное. Такое поведение, получившее название динамического хаоса, показано и проанализировано на большом числе частных примеров и представляется достаточно универсальным. Близкие траектории такого движения разбегаются в фазовом пространстве, т.е. они локально неустойчивы. Поэтому для описания фазового портрета, наряду с точным расчетом траекторий с помощью ЭВМ, могут быть использованы и статистические методы, если нас интересует поведение системы в течение достаточно длительного времени.

Но этого мало. При рассмотрении поведения систем со стохастичностью, а в особенности взаимодействия таких систем, могут быть использованы представления, заимствованные из теории управления и кибернетики. Они были развиты для описания искусственно созданных систем с управлением, но затем нашли свои аналоги и в природных явлениях, в частности в биологических процессах.

Хаотическое поведение свойственно большей части динамических систем как консервативных, с сохранением энергии, так и диссипативных. Для гамильтоновых систем, у которых фазовый объем сохраняется, движение носит характер перемешивания в фазовом пространстве: начальная "капля" фазового пространства, размер которой задан неопределенностью начальных данных, сложным образом деформируется в процессе движения. "Капля" испускает из себя "отростки", которые затем вытягиваются, деформируются и постепенно "прорастают" во все фазовое пространство, сохраняя свой объем, так что все это становится похожим на комок ваты. Близкие траектории при таком движении экспоненциально быстро расходятся друг от друга, средний темп их разбегания характеризуется энтропией Колмогорова–Синяя. В процессе перемешивания траектории могут сколь угодно близко подходить к любой заданной точке в пространстве. Такие системы называются эргодическими — средние значения некоторой функции от координат фазового пространства по времени и по пространству совпадают в них между собой.

В системах с диссипацией фазовый объем сокращается в процессе движения. В простейшем случае такая система эволюционирует к состоянию равновесия — соответствующая траектория в фазовом пространстве имеет вид устойчивого фокуса. При подпитке энергией извне диссипативная система может испытывать устойчивые колебания — это устойчивый цикл в фазовом пространстве (в многомерном случае — тор), а может перейти в режим сложного стохастического движения, которое получило название странного аттрактора. Таким образом, все траектории диссипативной системы в фазовом пространстве соответствуют аттракторам — равновесию, периодическим колебаниям или странному аттрактору. Одним из аттракторов может быть разрушение системы.

Если диссипативная система имеет много степеней свободы, то у нее может быть много зон притяжения в фазовом пространстве. Если они составлены из устойчивых фокусов, то система будет стремиться к одной из точек устойчивого равновесия. В этом случае говорят о мультиравновесной системе — это простейший пример запоминающего устройства для компьютера. Предельное состояние может быть также одним из многих предельных циклов — такие запоминающие устройства также существуют (например, циклическая цепочка бегущих друг за другом цилиндрических магнитных доменов). В более общем случае система может стремиться к одному из многих возможных аттракторов, включая странные аттракторы. При выведении такой системы из заданного аттрактора с помощью внешнего

воздействия, она будет эволюционировать к другому аттрактору, зона притяжения которого покрывает точку начального состояния системы. В сложных физических системах с многими аттракторами может развиваться процесс упорядочения, который получил название самоорганизации.

В простейшем случае самоорганизация — это появление порядка в первоначально однородной среде, другими словами, возникновение спонтанного нарушения симметрии в неустойчивом однородном состоянии. Имеется масса примеров самоорганизации этого типа в физике, химии и других естественных науках.

Фазовые переходы второго рода можно, следуя Ландау, описывать введением параметра упорядочения. Аналогичный подход используется для описания возникновения ячеек Бенара в подогреваемом снизу слое жидкости. На этих примерах видно, что появление порядка и новой симметрии связано с возрастанием некоторого физического параметра упорядочения существенно выше первоначального теплового уровня. При развитии неустойчивости жидкости — это макроскопические параметры жидкости: скорость, плотность, температура. Химические автоволны могут описываться в терминах концентраций, участвующих в реакции веществ.

Макроскопические величины, такие как скорость, плотность, температура и концентрация химических веществ, являются непрерывными функциями точки, т.е. физическими полями. Поэтому формально такие поля имеют бесконечное число степеней свободы. Однако при появлении порядка или развитии структур возбуждается только конечное число степеней свободы. Особенно хорошо это видно на примере ячеек Бенара или вихрей Тейлора. Поэтому системы с упорядочением часто можно рассматривать как системы с конечным числом степеней свободы, они допускают моделирование (по крайней мере, численное) простыми динамическими системами. Напомним, что именно на примере описания конвекции жидкости были найдены странные аттракторы.

При переходе к турбулентности число сильно возбужденных степеней свободы может быть очень большим. Однако и в этом случае число эффективно действующих свободных величин может быть не очень велико. Известно, что фрактальная размерность эффективного фазового пространства, как правило, не велика: мелкомасштабные степени свободы просто подстраиваются под крупномасштабные и выполняют роль более интенсивной диссипации.

Резюмируя, можно сказать, что самоорганизация в однородных средах и образование структур выводит некоторые коллективные степени свободы на уровень, очень далекий от теплового. Эти степени

свободы могут описываться в терминах макроскопических параметров, играющих роль обобщенных координат в соответствующих динамических моделях. Поэтому описание самоорганизованных систем сходно с описанием динамических систем.

Более сложный тип самоорганизации возникает в том случае, когда в появившихся структурах может развиваться иерархия структур с появлением и взаимодействием новых структурных элементов. Примером может служить добиологическая эволюция макромолекул и биологическая эволюция. Упрощенно говоря, такая самоорганизация вовлекает в игру новые степени свободы, которые с точки зрения динамического моделирования можно рассматривать как элементы памяти на мультистабильных состояниях. Например, барханы пустыни можно рассматривать как медленно эволюционирующую динамическую систему, запоминающую историю взаимодействия поверхности песка с ветрами. Количественное описание соответствующих процессов развития можно моделировать динамическими моделями с диссипацией и памятью с достаточно большим числом степеней свободы.

Сам факт существования стохастических систем с небольшим числом степеней свободы должен заметно изменить наше представление о постановке динамических задач. В самом деле, раньше существовала точка зрения, что стохастичность присуща только системам с очень большим числом степеней свободы, для которых естественно использовать статистическое описание, а системы с небольшим числом степеней свободы должны описываться точно — "точно" в рамках принятой модели, которая, может быть, не всегда достаточно полно соответствует реальности, но последнее обстоятельство можно заменить анализом отклика системы на малые возмущения: в устойчивой системе возмущения остаются малыми.

Если система неустойчива, то все траектории в фазовом пространстве разбегаются, и поэтому очень большое значение приобретают начальные данные. Если мы хотим, чтобы траектория реального движения была близка к выбранной нами траектории, т.е. чтобы она попадала в некоторую область фазового пространства в конце траектории, начальные данные должны быть выбраны с достаточной степенью точности. Другими словами, нужно указать достаточно много десятичных знаков у каждой из координат  $q$ . Число знаков после запятой пропорционально  $+\ln(1/\Delta q)$ , где  $\Delta q$  — точность задания координаты. При задании всех координат и импульсов с некоторой точностью мы получаем величину, пропорциональную  $\ln(V/\Delta V)$ , где  $V$  — полный объем фазового пространства, а  $\Delta V$  —



доля объема фазового пространства в начальном состоянии. Величина  $\ln(V/\Delta V)$  называется количеством информации. Таким образом, в неустойчивых системах наряду с динамической частью задачи, связанной с силовым взаимодействием тел, большую роль приобретает информационная часть, связанная с заданием начальных значений координат.

Но и это еще не все. Рассмотрим, к примеру, гамильтонову систему и предположим, что мы интересуемся задачей о попадании фазовой траектории в некоторую конечную "каплю" в фазовом пространстве. Спроектируем эту "каплю" вдоль фазовых траекторий из будущего на начальное время. Тогда соответствующая капля расплывается в "комочек ваты", с большой скважностью покрывающей заметную часть фазового объема. Случайная точка в объеме, скорее всего, не попадет на "волокно", но при очень малом смещении в фазовом пространстве можно попасть на траекторию внутри "волокна", оканчивающуюся в "капле". Итак, очень малое смещение в фазовом пространстве может привести нас на нужную траекторию, надо только знать, куда смещаться. Знание — это тоже информация. Самым простым способом это знание может быть получено путем прослеживания за траекториями. Именно так и устроены системы управления: они следят за реальной траекторией и малыми сигналами изменяют ее, переводя на нужную.

Итак, в неустойчивых системах можно сильно изменить траекторию малыми сигналами. Для этих сигналов важна не их величина, а точное соответствие возможности перевода исходной траектории на нужную, т.е. следует иметь правильную информацию о структуре фазового портрета.

Рассмотрим теперь системы с диссипацией. У открытых систем такого типа фазовое пространство упрощенно можно представлять себе разделенным на области притяжения к различным аттракторам. Для перевода системы из одного аттрактора в другой ее нужно перебросить из одной области притяжения в другую. При этом опять на первый план выступает не величина силового воздействия, а его информационная характеристика: воздействие должно перебросить систему в любую точку притяжения второго аттрактора, т.е. системе следует сообщить определенное количество информации  $\ln(V/\Delta V)$ , где  $\Delta V$  — объем притяжения второго аттрактора. Разумеется, чтобы реально осуществить переброс системы с одного аттрактора на другой, требуется затратить определенное количество энергии, и, возможно, существует некоторое минимальное ее значение, ниже которого такой перенос невозможен и соответствующий сигнал не реализует имеющуюся информацию.

Тем не менее не только динамический, но и информационный аспект оказывается важным для рассматриваемого перехода. Соответственно и описывать его нужно в терминах информационных процессов. При этом оказывается важным не только количество сообщаемой информации, но и ее содержание (иногда говорят, семантическое содержание), т.е. указание, в какой именно аттрактор система переводится.

Рассмотрим некоторую систему, динамически неустойчивую, т.е. с разбегающимися траекториями. Чтобы упростить рассуждения, займемся ее крайне упрощенной дискретной моделью, в которой траектория последовательно проходит через точки бифуркации.

В каждой точке ветвления система совершает "поступок" — она выбирает один из последующих участков траектории. Если в каждой точке выбор случаен и корреляция между выборами отсутствует, то это пример цепи Маркова. Однако не это нас интересует.

Мы предположим, что рассматриваемая система на самом деле сложная и наряду с внешними динамическими переменными у нее есть внутренние степени свободы, например соответствующие мультистабильным состояниям или внутренним аттракторам. Тогда выбор траектории в точках бифуркации будет определяться состоянием внутренних степеней свободы. Если у системы есть источник энергии, то для такого выбора опять важно лишь информационное указание, какая траектория предпочтительна. Такую систему можно рассматривать как систему с управлением, которое определяется состоянием внутренней динамической системы.

На фоне силовой динамики поведение такой системы начинает определяться информационными свойствами системы, и, соответственно, ее можно назвать системой с информационным поведением. Если к тому же имеется обратная связь между динамическими и внутренними степенями свободы, то такая система может очень сложно реагировать на все внешние воздействия.

Изучение поведения сложных систем, безусловно, представляет собой предмет конкретных исследований. Тем не менее можно высказать и некоторые общие соображения.

При сравнении простых и сложных систем, например простых механизмов и биологических систем со сложной иерархической организацией, резко бросается в глаза их принципиальное различие, состоящее в том, что движение простых механических систем полностью предопределено, а в живых организмах, даже простейших, мы видим признаки свободного поведения, не определяемого только внешними причинами. Разумеется, эта свобода действий еще более ярко выражена у сложных организмов.

Спрашивается, нельзя ли проследить за этой тенденцией развития, исходя из представлений о самоорганизации.

Как мы обсуждали выше, у самоорганизующихся систем имеется возможность расслоения на динамическую и информационную, управляющую, части. Если речь идет о биологических или добиологических системах, у которых имеется возможность репликации и многократного повторения цикла развития, то нетрудно себе представить, что системы с информационным поведением могут иметь и фактически имеют преимущества в борьбе за жизнь, т.е. за расширение фазового пространства своего устойчивого существования. Таким образом, в условиях конкуренции динамическое поведение системы и ее развитие в большей мере начинает определяться ее информационными свойствами, включая информационное отношение к внешнему миру.

Такие системы наряду с обычным обменом энергией и негэнтропией с внешним окружением, необходимым для сохранения открытой самоорганизованной структуры, получают возможность информационного развития, т.е. усложнения и совершенствования своего управления. Этот процесс связан с усложнением управляющей части, т.е. появлением в ней новых степеней свободы или параметров порядка за счет все новых бифуркаций. Феноменологически этот процесс можно охарактеризовать как получение дополнительной информации от неравновесного внешнего мира.

При взаимодействии систем с памятью и информационным поведением могут развиваться процессы адаптации одних систем к другим. Это аналог появления "знаний" о реакции других систем на поведение данной. Дальнейшее развитие механизмов адаптации и оптимизации поведения системы приводит к возможности обработки информации, т.е. к появлению элементов сознания. Но кроме свободы у сложных систем появляются зачатки воли.

Свобода — это возможность выбора из нескольких альтернатив, акт воли — сам этот выбор. В неустойчивых системах с разбегающимися траекториями для выбора одной из траекторий достаточно очень мало изменить начальные данные, т.е. использовать для этой цели очень малый сигнал с определенной информацией. В сложной системе с информационным поведением этот выбор может быть сделан сигналом из блока управления. Сигнал вырабатывается системой управления в процессе ее динамического движения и с использованием накопленной ранее памяти, т.е. знаний. Эти знания представляют собой продукт длительного развития данной системы в процессе ее взаимодействия с другими информационными системами. Знания в некоторой мере приобретают невременной характер, т.е. становятся

не жестко связанными с событиями только ближайшего прошлого. Благодаря этому волевой акт выглядит как бы свободным — он не предопределен видимыми в настоящий момент причинами. Более того, проинтегрированные за большой промежуток времени и накопленные в памяти сведения содержат информацию о временном поведении системы и ее окружения, поэтому появляется возможность предугадывания событий, а следовательно, принятия решений с определенной целью. Другими словами, в отличие от обычной динамики, где поведение системы определяется ее мгновенной конфигурацией и соответствующими этой конфигурации силами, в информационных процессах выбор делается на основе долговременной памяти и с возможной экстраполяцией на будущее. Отсюда и появляется возможность выбора цели. Таким образом, целесообразность и возможность выбора цели можно считать достаточно естественным продуктом развития сложных систем с информационным поведением.

Чем система сложнее, тем, казалось бы, в большей мере у нее должны проявляться аспекты информационного поведения. В Природе в целом "волевое начало" связано с той структурой и памятью, которые сложились в ней в результате ее длительного развития. Когда в процессе исследований мы изолируем некоторую систему от внешнего окружения, мы, безусловно, создаем более простую и доступную для понимания ситуацию, но вместе с тем и обедняем ее путем информационной изоляции от внешнего мира.

При переходе к изучению все более сложных систем именно структурные, информационные аспекты их поведения и развития выступают на первый план, а динамика создает лишь основу для информационного развития.

С учетом квантовых процессов в микромире картина развития мира становится еще более сложной и более богатой в смысле ее информационного поведения. В игру вступает новый неравновесный и сильно нелинейный процесс — коллапсы волновых функций. Соответственно, усложняется структура информационных связей и их влияние на динамические процессы.

Понятие коллапса волновой функции естественно возникает при измерении квантовой величины: согласно основному принципу квантовой механики такое измерение с некоторой вероятностью "выдает" только одно из дискретных собственных значений соответствующего оператора. Можно сказать, что при "информационном соприкосновении" квантового объекта с классическим неравновесным окружением, например с прибором, у его волновой функции сохраняется только одна проекция, а остальные компоненты уничтожаются. Этот процесс

называют также декогерентностью, и в последние годы он, наряду с "историчностью", широко обсуждается в литературе по основаниям квантовой теории (см., например, обзор Омнэ [106]).

Выше нами была принята гораздо более простая точка зрения, согласно которой декогерентность и коллапсы волновых функций нашего окружения происходят в результате огромной его неравновесности, связанной, в частности, с потоком негэнтропии от Солнца. Квантовые переходы в процессе термализации солнечного света порождают, с одной стороны, процесс монотонного возрастания энтропии, а с другой стороны, они разрушают когерентность волновых функций макротел и тем самым диктуют им условия классического поведения. Иначе говоря, эволюция неравновесной природы сама по себе приводит к классическому поведению макротел. Соприкосновение классического макромира с квантовым микромиром порождает коллапсы волновых функций. А при квантовых измерениях эти коллапсы сопровождаются коллапсами вероятностей, которые и порождают информацию о микрообъекте во внешнем мире.

Проблема измерения в квантовой механике всегда привлекала и продолжает привлекать интерес многих физиков, как теоретиков, так и экспериментаторов. Существует две основные точки зрения в этом отношении. Одна идет от Н. Бора и состоит в том, что результаты измерения являются чисто случайными и квантовая теория предписывает только вероятности, пропорциональные квадратам амплитуд волновой функции. Какие именно амплитуды будут измеряться, зависит от устройства конкретного прибора и макрообстановки. Другая точка зрения восходит к А. Эйнштейну. Она предполагает, что за случайными результатами измерений лежит более сложная физическая картина мира. Эта вторая точка зрения развивалась в различных вариантах теорий "скрытых параметров". Однако в последние годы, в особенности после экспериментальной проверки неравенств Белла, признание получил подход Бора. Но вопрос еще не снят с повестки дня и продолжает обсуждаться в научной литературе.

При этих обсуждениях очень часто используется знаменитый парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена [8]. Он состоит в мысленном эксперименте, когда две квантовые частицы после взаимодействия разносятся очень далеко друг от друга. Обе частицы коррелированы между собой, и поэтому результаты измерений над одной частицей оказываются скоррелированными с результатами измерений над другой частицей. На первый взгляд это выглядит, как мгновенное дальнее действие. Не удивительно, что разными авторами в разное время обсуждалась возможность передачи сигналов быстрее скорости света с помощью коррелированных ЭПР-пар.

В работах Шимони [95] и Гирарди, Римани, Вебера [93] было показано, что в рамках стандартной квантовой теории, когда все результаты измерения следуют закону  $|\psi|^2$ , сверхсветовые сигналы невозможны. Оказывается, что измерения, проводимые над одним партнером ЭПР-пары, никак не могут быть использованы для управления результатами измерений над вторым партнером. Казалось бы, этим вопрос исчерпан. Однако, как специально подчеркивает Шимони [95], при доказательстве неявно делается предположение, что в макротелах не могут существовать микрокорреляции.

Чтобы показать, что этот вопрос не столь тривиален, мы посвятили его обсуждению разделы 37–46. В разделе 41 описывается эффект, обнаруженный в экспериментах Соколова и др. [84, 85], когда при пролете сквозь щель в металлической диафрагме возбужденного 2S-атома водорода у него сама собой появляется добавка 2P-амплитуды. Самое простое теоретическое объяснение [86] этого эффекта основано на идее, что атом водорода является первым партнером множества ЭПР-пар, а вторыми партнерами являются электроны проводимости. После взаимодействия в поверхностном слое металла электроны улетают внутрь металла, и там их волновые функции коллапсируют за счет механизма декогерентности. При таком коллапсе нет никакого измерения извне и поэтому нет точного следования закону  $|\psi|^2$ : из соображений сохранения энергии при каждом таком коллапсе с большей вероятностью выделяется более медленная часть волнового пакета. Здесь фактически нет никакого измерения: в процессе эволюции сложной волновой функции многих электронов коллапсы приводят к тому, что медленная часть волнового пакета каждого провзаимодействовавшего с атомом электрона имеет вероятность появления несколько больше, чем соответствующая величина  $|\psi|^2$ . Индивидуальный эффект чрезвычайно мал, но он имеет один и тот же знак, так что соответствующие добавки к амплитуде 2P накапливаются. Можно сказать, что возбужденный атом создает микрокорреляции внутри макротела, которые постепенно приводят к накоплению 2P-амплитуды атома из 2S-амплитуды. В результате возникает процесс когерентного сложения амплитуд, напоминающий эффект лазерного излучения.

Поскольку коллапсы одиночных электронных волновых функций не обязаны следовать закону вероятностей  $|\psi|^2$ , то можно обсуждать возможность управления коллапсами вторичных партнеров ЭПР-пар. Соответствующая схема рассмотрена в разделе 44. В настоящее время трудно сказать, насколько она реальна: это вопрос прежде всего экспериментальный. Но может быть поставлен вопрос чисто теоретический: а не противоречат ли сверхсветовые сигналы стандартной

теории относительности? Эти вопросы обсуждаются в разделах 45, 46, 52. В них показано, что сверхсветовые сигналы на коллапсах, а не на материальных носителях могут не противоречить теории относительности. Более того, можно представить себе схему на рис. 31, когда полностью исключены петли замыкания причины — следствия. В этом случае причинность не нарушается даже в сверхсветовых областях  $C$ .

Идеи о самоорганизации и образовании диссипативных структур в открытых системах оказались очень важными для того, чтобы перебросить мостик между физикой и биологией. Но видно, что следует идти дальше и изучать самопроизвольную иерархизацию структур, образование структур с памятью и возможностями извлечения информации извне, накопления ее в памяти, использования информации для управления и обработки этой информации с целью оптимального управления. Нетрудно видеть, что существует много общих черт в поведении сложных систем как органических, так и неорганических, причем неорганические системы со сложной структурой тоже не являются простыми как в структурном плане, так и по характеру их поведения.

## К главе I. Алгоритмическая информация и демон Максвелла

В разделе 5 "Энтропия и информация" мы рассмотрели действия демона Максвелла с точки зрения второго закона термодинамики. При этом мы пользовались величиной информации по Шэннону (3), (5), которую очень легко связать с выражением для энтропии (27). Выражение (3) можно было бы назвать "физической информацией", поскольку она выражается в терминах вероятностей, естественных для физической статистики.

Но к понятию информации можно подойти с совершенно иных позиций. А именно, в работах Соломонова [107], Колмогорова [108] и Чайтина [109] была введена новая мера информации — размер (в битах) кратчайшей компьютерной программы, которая может описать ленту из нулей и единиц, представляющей собой запись данного информационного сообщения. Такое определение даже по внешнему виду существенно отличается от простого выражения (3), а по своей сути оно кажется даже более приемлемым для демона Максвелла, который вполне мог бы воспользоваться в своих действиях универсальной вычислительной машиной.

Рассмотрим, например, следующую ситуацию. Пусть в распоряжении демона Максвелла имеется множество,  $N \gg 1$ , идентичных микротепловых машин Сцилларда. Каждая из них представляет собой ящик с одним единственным атомом. Каждый ящик может посредине перегораживаться заслонкой и тогда образуется  $N$  ящиков с атомами, расположенными только в одной из половин. Далее демон может измерить, в какой из половин каждого ящика находится атом, и записать результат этого измерения в виде ряда из нулей и единиц:

$$010010100010111001 \dots \quad (367)$$

Как было показано Беннетом [110], такое измерение может быть проведено без затраты энергии. После измерения у демона появляется запись (367) с некоторым объемом информации, а энтропия  $N$  ящичков



с атомами падает на величину  $\Delta S = -N \ln 2$ . Строго говоря, чтобы произвести запись (367) демон или компьютер, его заменяющий, должен иметь определенные информационные ресурсы, но мы вернемся к этому вопросу чуть позже, а сейчас обратим внимание на несколько иное обстоятельство. Если бы ряд (367) был выбран совершенно случайно, то его информация по Шэннону равнялась бы  $I = N \ln 2$ . Но демон, или компьютер, может попытаться найти алгоритмическую информацию ряда (367). Эта информация может оказаться меньше  $N \ln 2$ , и тогда возникает вопрос, нельзя ли получить работу с помощью  $N$  микромашин Сцилларда (т.е. путем расширения той части объема, где находится атом) с гораздо меньшим возрастанием энтропии, чем в случае полного стирания информации ряда (367) и превращении ее в тепло. Этот вопрос был подробно проанализирован в работах Беннета [110] и Зурека [111, 112] (см. также работы [113, 114]). Мы резюмируем здесь результаты проведенного ими анализа.

Алгоритмическую информацию ряда (367) можно рассматривать как меру алгоритмической хаотичности рядов такого рода. Оказывается (см., например, [112] и цитированную там литературу), что практически все ряды вида (367), за малым исключением хорошо упорядоченных рядов, имеют алгоритмическую информацию, равную  $I = N \ln 2$ . Другими словами, алгоритмическая информация очень длинных рядов вида (367) практически совпадает с информацией по Шэннону (3). Это значит, что практически все ряды вида (367) имеют энтропию, равную физической энтропии. Поэтому, если своим конечным шагом демон Максвелла сотрет всю информацию вида (367) и превратит ее в энтропию (т.е. в тепло), то он диссипирует при этом точно такое же количество энергии, какое он приобрел с помощью микромашин Сцилларда.

То же самое утверждение можно сформулировать несколько иначе. В течение многих лет считалось, что необратимость в действиях демона возникает при измерении. Необратимость в цикле демона в самом деле есть, но она не обязательно связана с процессом измерения. Ведь результатом измерения является просто архивная запись в виде ряда (367). Этот ряд можно рассматривать как копию с информационного ряда ящиков Сцилларда, в каждом из которых атом находится либо в правой, либо в левой из его половин. Как было показано Ландауэром [115, 116], снятие копии является обратимой информационной операцией, не требующей затраты энергии и превращения ее в тепло. Ту же самую обратимость можно увидеть и на рис. 1: восприятие, т.е. перебор информации из питателя  $F$  в анализатор  $A$  является полностью обратимым процессом. Информационная необратимость возникает только при стирании информации,

содержащейся в ряде (367). А для того, чтобы подготовить систему измерения и записи информации  $A$  (см. рис. 1) к следующему циклу, демон должен сбросить в окружающую среду всю записанную ранее информацию и запитать систему негэнтропией, которую можно использовать для последующей операции копирования. Согласно Ландауэру именно стирание информации и подготовка системы сбора информации к следующему циклу (*reset of memory*) сопровождается увеличением энтропии окружения, притом не менее одного бита на одну ячейку памяти.

Итак, рассмотрение более сложных операций демона Максвелла, опирающихся на его "разумное" использование универсальной вычислительной машины, приводит к прежнему выводу: никакие действия не дают возможности превратить тепло в работу без всяких изменений в окружающей среде. Другими словами, информационное описание демона Максвелла полностью согласуется со вторым законом термодинамики.

## К главе II. Чистые и смешанные ансамбли

В книгах и статьях по квантовой теории довольно часто встречается утверждение, что квантовая механика является статистической теорией: все, что она может предсказать, это якобы вероятности тех или иных событий, или результатов измерений. Такое утверждение, хотя и правильное, находится в сильном контрасте с тем фактом, что вычисленные в рамках квантовой теории константы имеют потрясающую точность и находятся в блестящем согласии с экспериментами.

Встречается также утверждение, что вся информация о квантовой системе содержится в матрице плотности. Тем самым создается впечатление, что все квантовые системы по отношению к измерительным приборам, т.е. к внешнему миру, всегда оказываются представителями смешанных ансамблей. В связи со всеми этими утверждениями хотелось бы дать некоторые разъяснения по поводу той точки зрения, которая принята в данной книге. Она состоит в следующем.

Во-первых, я полагаю, что  $\psi$ -функция представляет собой реальность, существующую независимо от всяких приборов и методов измерений. Реальность  $\psi$ -функции, а не просто способ описания — вот главный тезис. Но эта реальность особого рода. Волновая функция только по внешнему виду, — как функция координат и времени, — похожа на скалярные физические поля. На самом деле, это не обычное физическое поле. Волновая функция  $\psi$  не переносит энергии и импульса. Она имеет чисто информационный характер: среднее

значение любой физической величины  $\langle L \rangle$  находится по формуле

$$\langle L \rangle = \frac{\int \psi^* L \psi dx}{\int \psi^* \psi dx}, \quad (368)$$

где  $L$  — соответствующий оператор,  $x$  — набор соответствующих переменных.

Согласно (368) нормировка  $\psi$ -функции не имеет никакого значения. Не имеет значения и постоянный фазовый множитель  $\exp(i\alpha)$ , который может быть добавлен к  $\psi(x)$ . Более того, если оператор  $L$  относится к некоторой не очень широкой области пространства, то при заданном  $\langle L \rangle$  волновая функция может быть исчезающе мала вдали от данной области. Другими словами, пакетизация волновой функции может не сказываться на значении физической величины  $\langle L \rangle$ . Именно этот факт и означает, что мы придаем  $\psi$ -функции чисто информационный смысл. Можно сказать, что волновая функция представляет собой физический объект, гораздо более тонкий по сравнению с обычными физическими полями.

Во-вторых, я считаю, что у одной единственной квантовой системы никаких объективно существующих смешанных ансамблей нет. Каждый квантовый объект, каждое физическое тело имеет в данный момент только одну единственную волновую функцию. В этом смысле все объективно существующие волновые функции соответствуют чистым состояниям (их можно называть ансамблями, но в этом большого смысла нет).

В-третьих, волновые функции в общем случае являются случайными функциями. Только в специфических условиях изолированных квантовых систем волновые функции детерминированы и подчиняются уравнению Шрёдингера. При любой открытости квантовой системы, т.е. при соприкосновении ее с внешним окружением, волновая функция становится случайным объектом: даже слабая открытость системы может приводить к "событиям", т.е. к случайным "квантовым скачкам".

Именно по той причине, что волновая функция является случайной, появляется возможность и целесообразность введения в рассмотрение смешанных ансамблей. Смешанный ансамбль — это способ статистического описания квантовой системы. Смешанные ансамбли удобно вводить в тех случаях, когда возникает необходимость статистического, т.е. усредненного описания физических свойств квантового объекта.

Такая необходимость возникает в двух случаях. Первый — это нахождение усредненных значений физической величины по многим результатам измерений. Второй — это, когда мы имеем сложную

систему с большим числом однотипных квантовых подсистем. Например, в случае газа объемы с размерами порядка длины свободного пробега являются как бы представителями одной и той же системы: смешанный ансамбль появляется здесь как физический объект в виде множества подсистем с "одним лицом". Но этот объект опять же не вполне реален — в каждой подсистеме волновая функция близка к чистому состоянию и только при усреднении появляется возможность пользоваться смешанными ансамблями.

Таким образом, именно чистая волновая функция (чистый ансамбль) является объективной реальностью в каждый момент времени, а смешанный ансамбль представляет собой вспомогательный теоретический инструмент, удобный для статистического описания.

## К главе III. Запутанные состояния

### III.1. Квантовая нелокальность

С проблемой нелокальности квантовая механика встретила в первые же годы своего становления. Первой неожиданностью физики микромира было соотношение неопределенностей Гейзенберга. Оказалось, что даже для простой локализации частицы в пространстве требуется иметь определенный запас энергии. Вторым сюрпризом была интерференция квантовых волн на двух щелях: у частицы явно существуют нелокальные волновые свойства. Но особенно большой отклик у ученого мира нашла статья Эйнштейна, Подольского, Розена [7] под названием "Можно ли считать, что квантовомеханическое описание физической реальности является полным?". Авторы вводят сначала следующее определение элемента физической реальности: "Если мы можем, без какого бы то ни было возмущения системы, предсказать с достоверностью значение некоторой физической величины, то существует элемент физической реальности, соответствующий этой физической величине". Затем они рассматривают волновую функцию двух частиц в виде

$$\psi(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2 - a) \delta(P_1 + P_2). \quad (369)$$

Это функция является собственной функцией по отношению к оператору  $(X_1 - X_2)$  (с собственным значением  $a$ ), а также по отношению к оператору  $P_1 + P_2$  (с собственным значением 0). Это возможно, поскольку коммутатор  $[X_1 - X_2, P_1 + P_2]$  равен нулю.

Но теперь видно, что измерение координат одной из частиц, скажем  $x_2$ , автоматически приводит к значению координаты  $x_1 = x_2 + a$  у второй частицы. А измерение импульса  $P_2$  у той же частицы дает значение  $P_1 = -P_2$  у первой частицы. Таким образом, измерение, проводимое над одной из частиц, автоматически изменяет состояние второй частицы, даже если они удалены друг от друга на очень большое расстояние. Это и есть так называемый "парадокс" Эйнштейна – Подольского – Розена. По мнению авторов этот мысленный эксперимент указывал на неполноту квантовомеханического описания, поскольку он находится в противоречии с интуитивным представлением о существовании элементов реальности.

На статью Эйнштейна, Подольского, Розена немедленно откликнулся Бор [117], показавший, что в данном случае речь идет опять о тех же самых основных квантовомеханических свойствах, которые проявляются в соотношении неопределенностей и в эффекте интерференции. Свойства микрочастиц не могут быть полностью отделены от той экспериментальной обстановки, в которой они наблюдаются. Фактически это утверждение соответствует признанию нелокальности квантовых явлений.

Более простой вариант ЭПР-корреляций был рассмотрен Бомом [118]. Он представлен на рис. 43. Две частицы со спином  $1/2$  приготавливаются вначале в точке  $S$  в синглетном состоянии, затем они разлетаются в противоположные стороны.

Каждая из частиц находится в суперпозиции состояний со спином, направленным вверх, и со спином, направленным вниз. Если в точке  $B$  измерить направление спина, то волновая функция в точке  $A$  испытает коллапс в состоянии с противоположно направленным спином.

На первый взгляд может показаться, что рассмотренная ситуация мало чем отличается от классических коррелированных событий. В самом деле, рассмотрим следующий пример (рис. 44). Пусть имеется два шара – белый и черный. Эти шары помещаются в коробку и там взбалтываются. Затем, не открывая коробку, в нее вводят перегородку  $D$  и разделяют ящик на два ящика меньших размеров  $A$  и  $B$ . Ящики  $A$  и  $B$  разносятся на далекое

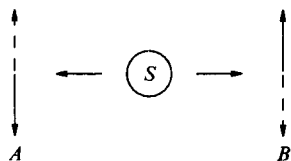
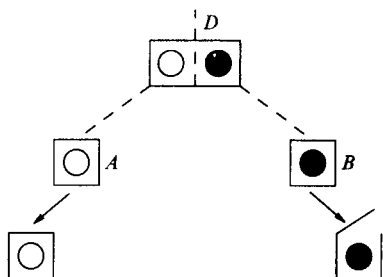
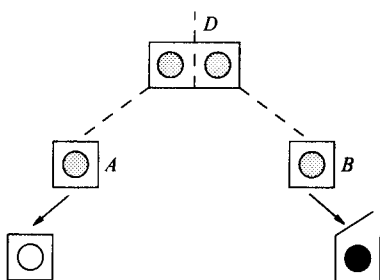


Рис. 43. Две частицы со спином  $1/2$  в синглетном состоянии разлетаются в противоположные стороны. В каждой из точек наблюдения,  $A$  или  $B$ , имеется суперпозиция состояний со спином вверх и спином вниз. Измерение в одной из точек, скажем в  $B$ , оставляет только одно из направлений спина, а в точке  $A$  немедленно уничтожается состояние с тем же самым направлением спина.

расстояние друг от друга. Если теперь один из наблюдателей, *A* или *B*, откроет свой ящик и увидит цвет своего шара, он мгновенно поймет, что у другого наблюдателя шар имеет противоположный цвет.



**Рис. 44.** Классический корреляционный эксперимент с черным и белым шарами. Черный и белый шары помещаются в ящик, который разделяется затем перегородкой *D* на два меньших ящика *A* и *B*. Наблюдатель *B* может открыть ящик, и если он увидит черный шар, то ему станет известно, что в точке *A* находится белый шар.



**Рис. 45.** Квантовая аналогия с шарами, которые при наблюдении могут иметь либо черный, либо белый цвет. Шары помещаются в общий ящик, там запутываются, а затем разносятся в закрытых ящиках в точки *A* и *B*. Если наблюдатель *B* откроет ящик и увидит (измерит) черный цвет, то шар в ящике *A* мгновенно станет белым.

Как мы видим, у классического эксперимента (см. рис. 44) имеется отдаленная аналогия с квантовым экспериментом (см. рис. 43). Но на самом деле они принципиально различны. Чтобы лучше понять, в чем это отличие, удобно рассмотреть квантовый эксперимент с шарами, которые при наблюдении могут быть окрашены только в белый или черный цвет.

Пусть два таких шара помещаются в общий ящик, где их цвета запутываются, так что при наблюдении этих шаров (или одного из них) их цвета всегда будут противоположными. Пусть ящик снова разделяется на два ящика меньших размеров, которые разносятся в точки *A* и *B*. До наблюдения ни один из этих шаров не имеет определенного цвета: цвет появляется только при наблюдении, т.е. контакте волновой функции цвета шара с внешним миром. Как только ящик открывается для обозрения, у шара появляется цвет (т.е. происходит "коллапс цвета"). При этом второй шар мгновенно окрашивается в противоположный цвет.

Теперь мы можем понять, в чем состоит главное различие между рис. 44 и 45. На рисунке 44 случайное разделение черного и

белого шаров по малым ящикам происходит при взбалтывании большой коробки и последующем введении перегородки. Этот про-

цесс абсолютно случаен: он зависит от столь большого числа не контролируемых переменных, что никакой закономерности в разнесении шаров по малым ящикам нет (можно сказать, что мир в целом "принимает решение" о том, как эти шары разместятся по малым ящикам). После введения перегородки образуется система с одним битом информации. Состояний может быть только два: черный — белый или белый — черный. Этот бит информации переносится затем в точку  $A$ , а копия этого бита (с заменой цвета на противоположный) переносится в точку  $B$ . Можно сказать, у ящиков  $A$  и  $B$  имеется скрытый параметр — цвет шара в ящике  $A$  и противоположный цвет в  $B$ . При открытии ящика  $B$  скрытый бит информации "выпархивает" во внешний мир.

Этот цвет может быть кем-то (или чем-то) записан в память и использован затем для приведения в действие некоторой цепочки событий. Сама считка цвета, т.е. копирование бита информации, представляет собой обычный обратимый информационный процесс. Для того, чтобы этот бит привел в действие цепочку процессов, он должен попасть в неустойчивую необратимую систему и активно повлиять на сценарий развития необратимого процесса.

В отличие от рис. 44 квантовые шары рис. 45 никаких скрытых параметров не несут. Случайный процесс появления цвета возникает только при открытии ящика: только в этот момент и происходит "коллапс цвета". У шаров  $A$  и  $B$  имеется квантовая корреляция: по предположению они находятся в запутанном состоянии, так что появление черного цвета у шара  $B$  мгновенно приводит к окрашиванию шара  $A$  в белый цвет.

Здесь-то мы и встречаемся с квантовой нелокальностью. Поскольку окрашивание шаров происходит при "измерении", т.е. при соприкосновении одного из шаров (или их обоих) с внешним миром, то следует считать, что внешний мир нелокален. Волновые функции внешнего мира опутаны нитями квантовых корреляций, которые мгновенно "срабатывают" при коллапсах волновых функций. Случайность таких процессов позволяет сохранить релятивистскую каузальность, но факт нелокальности следует признать реальным. Общая эволюция квантовых систем состоит из периодов их обратимого развития согласно уравнению Шрёдингера, перемежаемых случайными событиями коллапсирования волновых функций. Коллапсы волновых функций уравнением Шрёдингера не описываются.

Описанный подход соответствует взглядам Копенгагенской школы. Эйнштейн, Подольский и Розен, по-видимому, предпочли бы иметь теорию, в которой случайность событий следовала бы из случайности некоторых внутренних скрытых параметров. Долгое

время не было понятным, как можно экспериментально подтвердить или опровергнуть точку зрения о существовании скрытых параметров, т.е. о существовании свойств квантовых объектов до их измерения. Ситуация резко изменилась после работы Белла [29], в которой было показано, что допущение существования скрытых параметров приводит к некоторым неравенствам. Экспериментально было показано, что эти неравенства нарушаются в полном соответствии с ортодоксальной квантовой теорией.

Мы опишем здесь только два из многочисленных экспериментов по проверке оснований квантовой теории. В эксперименте Аспекта, Далибарда и Роджера [31] было показано, что квантовая связь между коррелированными объектами является сверхсветовой, а в экспериментах по идеям Франсона [119, 120] такая связь была продемонстрирована в специальной оптической схеме.

Упрощенная схема эксперимента Аспекта, Далибарда и Роджера представлена на рис. 46. Пары коррелированных квантов с длинами волн  $\lambda_1 = 422,7$  нм и  $\lambda_2 = 551,3$  нм создавались с помощью двухфотонного возбуждения каскада  $(Y = 0) \rightarrow (Y = 1) \rightarrow (Y = 0)$  в кальции. Тонкость эксперимента состояла в том, что направления поляризации  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  могли очень быстро изменяться с помощью акусто-оптического взаимодействия фотонов со стоячими ультразвуковыми волнами в воде. Скорость переключения была около 10 наносекунд, что значительно меньше времени возможной корреляции  $L/c$  (40 наносекунд), производимой какими-либо электромагнитными сигналами.

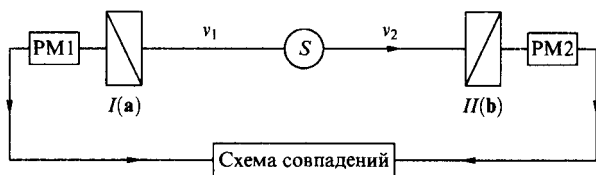


Рис. 46. Упрощенная схема эксперимента Аспекта, Далибарда, Роджера [31]. Пара фотонов  $v_1$ ,  $v_2$  анализируется линейными поляризаторами I и II (с направлением поляризации  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно) и регистрируется фотоумножителями PM1 и PM2. Схема совпадений обеспечивает регистрацию совпадающих по времени сигналов.

Результаты экспериментов оказались в полном соответствии с квантовой теорией. Тем самым было показано, что у фотонов нет никаких скрытых параметров, которые могли бы удовлетворить неравенствам Белла.

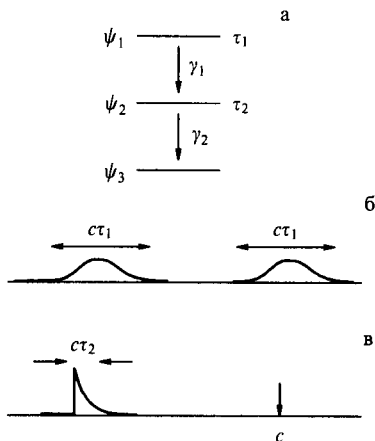


Идея второго оптического эксперимента была высказана Франсоном [119, 120]. Она схематически представлена на рис. 47.

Пусть возбужденный атом испытывает каскадный переход  $\psi_1 \rightarrow \psi_2 \rightarrow \psi_3$  с излучением квантов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Допустим также, что время жизни  $\tau_2$  промежуточного состояния  $\psi_2$  значительно меньше времени жизни  $\tau_1$  верхнего уровня  $\psi_1$ . Нелокальные свойства каскада таких двух фотонов определяются тем, что начальная неопределенность интервала времени излучения определяется величиной  $\tau_1$ , так что оба фотона описываются единым пакетом с длиной локализации  $c\tau_1$  (рис. 47б). Но если фотон  $\gamma_1$  измерить (скажем, размещая детектор вблизи точки  $C$  на рис. 47в), то фотон  $\gamma_2$  сколлапсирует в интервал шириной  $c\tau_2 \ll c\tau_1$ . Такая нелокальная редукция вполне аналогична рассмотренным выше коллапсам запутанных состояний (см. рис. 43, 45, 46). Ясно, что она должна сопровождаться соответствующей квантовой нелокальностью. Для наблюдения этой нелокальности Франсон предложил использовать нелокальный интерферометр (рис. 48). Он состоит из двух однофотонных интерферометров для наблюдения квантов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . На первый взгляд, регистрация кванта  $\gamma_2$  должна давать зависимость от сдвига фаз  $\phi_2$  только второго интерферометра при полном отсутствии зависимости от фазы  $\phi_1$ , удаленного интерферометра. Но в квантовой механике это не так.

Пусть разница  $\Delta T$  в сдвиге по времени между пролетами квантов вдоль длинных ( $L_1 = L_2$ ) и коротких путей ( $S_1 = S_2$ ) одинакова для обоих интерферометров. Тогда амплитуда  $A_T$  регистрации фотона  $\gamma_1$  в детекторе  $D_1$  и фотона  $\gamma_2$  в детекторе  $D_2$  в одно и то же время равна

$$A_T = A_{SS} + \exp[i(\phi_1 + \phi_2)] \exp[i(\omega_1 + \omega_2)\Delta T] A_{LL} + \\ + \exp(i\phi_1) \exp(i\omega_1\Delta T) A_{LS} + \exp(i\phi_2) \exp(i\omega_2\Delta T) A_{SL}. \quad (370)$$



**Рис. 47.** Схема эксперимента Франсона [119, 120]. (а) Атомный каскад с коротким временем жизни промежуточного состояния,  $\tau_2 \ll \tau_1$ . (б) До измерения оба фотона имеют неопределенность в пространстве масштаба  $c\tau_1$ . (в) Если фотон  $\gamma_1$  измеряется в точке  $C$ , то положение фотона  $\gamma_2$  коллапсирует в интервал  $c\tau_2 \ll c\tau_1$ .

Здесь амплитуда  $A_{LS}$  соответствует распространению кванта  $\gamma_1$  по длинному пути, а кванта  $\gamma_2$  по короткому пути (и аналогично для  $A_{SS}$ ,  $A_{LL}$ ,  $A_{SL}$ ). Если  $\Delta T$  невелико, то все амплитуды равны между собой:

$$A_{SS} = A_{LL} = A_{LS} = A_{SL} = A. \quad (371)$$

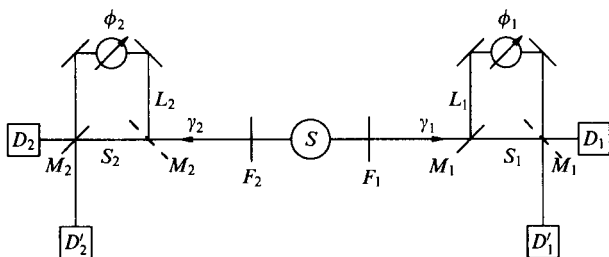
Соответственно, амплитуда (370) становится равной

$$A_T = A [1 + \exp(i\phi_1)] [1 + \exp(i\phi_2)]. \quad (372)$$

В этом случае вероятность совпадений  $R_C = A_T^* A_T$  оказывается равной

$$R_C = 16A^2 \cos^2\left(\frac{\phi_1}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\phi_2}{2}\right). \quad (373)$$

Эта величина равна просто произведению индивидуальных вероятностей того, что кванты  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  пройдут через соответствующие интерферометры и будут зарегистрированы детекторами  $D_1$ ,  $D_2$  в отсутствие какой-либо корреляции между квантами.



**Рис. 48.** Нелокальный интерферометр. Атом в точке  $S$  испытывает каскадный переход с испусканием квантов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Фильтры  $F_1$ ,  $F_2$  пропускают соответствующие кванты на интерферометры с короткими  $S_1 = S_2$  и длинными  $L_1 = L_2$  путями. Детекторы  $D_1$ ,  $D_1'$ ,  $D_2$ ,  $D_2'$  могут быть включены в схему совпадений.

Нелокальные эффекты возникают при условии

$$\tau_2 \ll \Delta T \ll \tau_1. \quad (374)$$

При этом разность фаз, набираемая на длинном пути, настолько больше разности фаз, набираемой на коротком пути, что величины

$$A_{LS} = A_{SL} = 0. \quad (375)$$

Поэтому амплитуда  $A_T$  равна просто

$$A_T = A_{SS} + \exp[i(\phi_1 + \phi_2)] \exp[i(\omega_1 + \omega_2)\Delta T] A_{LL}. \quad (376)$$

Сумма частот  $\omega_1 + \omega_2$  должна удовлетворять закону сохранения энергии, так что неопределенность  $\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$  в силу предположения (374) удовлетворяет неравенству

$$(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)\Delta T \ll 2\pi. \quad (377)$$

Соответственно, при  $A_{SS} = A_{LL} = A$  для вероятности совпадений получается выражение

$$R_T = 4A^2 \cos^2(\phi'_1 - \phi'_2), \quad (378)$$

$\phi'_1 = \phi_1/2$ ,  $\phi'_2 = -[\phi_2 - (\omega_{10} + \omega_{20})\Delta T]/2$  и  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  — центральные частоты соответствующих спектральных линий.

Выражение (378) зависит сразу от двух фазовых сдвигов:  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Ясно, что тем самым явно демонстрируется квантовая нелокальность. Результаты экспериментов по схеме Франсона приведены в работах [121–123]. Они находятся в полном согласии с квантовой теорией. Таким образом, еще раз было показано, что скрытых параметров в квантовой теории нет.

### III.2. Операции с запутанными состояниями

Как было показано в последние годы, в квантово-информационных процессах огромную роль могут играть квантовые корреляции Эйнштейна–Подольского–Розена. Поэтому мы более подробно рассмотрим вопрос о том, какие действия могут совершаться с квантовыми системами, находящимися в запутанных состояниях.

Начнем с самого простого примера — пары частиц со спином  $1/2$ , находящихся в синглетном состоянии. Волновая функция таких частиц,  $A$  и  $B$ , имеет вид

$$|\Psi(A, B)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow_A\rangle |\downarrow_B\rangle - |\downarrow_A\rangle |\uparrow_B\rangle \}. \quad (379)$$

Такая пара имеет максимальную величину запутывания. Если у одной частицы, скажем  $A$ , измерить направление спина частицы, то спин другой частицы  $B$  окажется направленным точно в противоположную сторону.

Если имеется ансамбль идентичных пар частиц, то измерение спина у частиц сорта  $A$  автоматически влечет за собой измерение спина частиц сорта  $B$ , причем каждый раз спины частиц  $A$  и  $B$  будут направлены в противоположные стороны. Можно сказать, что изме-

рение спинов частиц в системе  $B$  автоматически переводит чистый ансамбль подсистемы  $A$  в смешанный ансамбль. Если нас интересуют только усредненные по многим измерениям результаты, то нам следует пользоваться матрицей плотности

$$\rho_{AB} = |\Psi(A, B)\rangle\langle\Psi(A, B)|. \quad (380)$$

Если в системе  $B$  произведены измерения, то матрица плотности  $\rho_A$  системы  $A$  в соответствии с аксиомами квантовой теории равна

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}), \quad (381)$$

где  $\text{Tr}_B$  означает взятие следа матрицы по переменным системы  $B$ . В случае синглетного состояния (379) матрица  $\rho_A$  равна

$$\rho_A = \frac{1}{2} \{ |\uparrow_A\rangle\langle\uparrow_A| + |\downarrow_A\rangle\langle\downarrow_A| \}. \quad (382)$$

Написанные выше соотношения легко обобщаются на случай произвольных квантовых систем  $A$ ,  $B$ . Обозначим через  $|\alpha_i\rangle$ ,  $|\beta_i\rangle$  ортонормированные функции систем  $A$  и  $B$ .

Тогда волновую функцию объединенной системы  $A + B$ , которая описывает запутывание этих систем, можно представить в виде

$$\Psi(A, B) = \sum_{i=1}^d c_i |\alpha_i\rangle |\beta_i\rangle. \quad (383)$$

Здесь  $d$  — число запутанных состояний. Такое представление называется полярной формой Шмидта (или представлением Шмидта). Подходящим выбором функций  $|\alpha_i\rangle$ ,  $|\beta_i\rangle$  можно добиться, чтобы коэффициенты  $c_i$  были действительными и положительными. Например, в случае (379) в качестве базисных векторов  $|\alpha_i\rangle|\beta_i\rangle$  можно взять  $|\uparrow_A\rangle|\downarrow_B\rangle$  и  $|\downarrow_A\rangle|\uparrow_B\rangle$ . Кроме того, базисные векторы можно перенумеровать таким образом, чтобы числовая последовательность  $c_1, c_2, \dots, c_d$  была убывающей. Фактически, именно так и строится разложение Шмидта. А именно, первая пара векторов  $|\alpha_1\rangle|\beta_1\rangle$  находится из условия максимума скалярного произведения  $\langle\alpha_1|\langle\beta_1|\Psi\rangle$ . Затем эта процедура повторяется в ортогональном пространстве и так далее, пока не будет построена форма (383).

Согласно (383) матрица плотности  $\rho_{AB}$  равна

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^d c_i^2 |\alpha_i\rangle |\beta_i\rangle \langle\alpha_i| \langle\beta_i|, \quad (384)$$

а матрица  $\rho_A$  равна выражению

$$\rho_A = \sum_i^d c_i^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|. \quad (385)$$

Выражение для  $\rho_B$  получается отсюда заменой  $\alpha_i$  на  $\beta_i$ .

Как мы видим, в выбранном базисе матрицы  $\rho_A$ ,  $\rho_B$  являются диагональными с одним и тем же набором собственных значений  $c_i^2$ .

Введем в рассмотрение меру запутывания. Согласно [125] при измерении величины запутывания в битах она определяется соотношением

$$E_2 = -\text{Tr}\rho_A \log_2 \rho_A - \text{Tr}\rho_B \log_2 \rho_B = -\sum_i^d c_i^2 \log_2 c_i^2, \quad (386)$$

где символ  $\log_2$  означает логарифм при основании 2,  $d$  — число запутанных состояний. В случае одного синглета (379) коэффициенты  $c_1^2 = c_2^2 = 1/2$ , так что  $E_2$  равно одному биту.

Если речь идет не о квантовых вычислениях, а о физических системах, то более удобной мерой информации является величина

$$E = -\sum_i^d c_i^2 \ln c_i^2. \quad (387)$$

Здесь  $E$  измеряется в натах, а не в битах. Если число запутанных состояний равно  $d$ , то максимум  $E$  достигается, когда все  $c_i^2$  равны между собой, так что  $E_{\max} = \ln d$ ,  $d$  — размерность гильбертова пространства.

Рассмотрим теперь некоторые операции с запутанными состояниями. Допустим, например, что в синглетном состоянии (379) частица  $B$  представляет собой составной элемент более сложной системы  $C$ . Если частица  $B$  со спином  $1/2$  находится во взаимодействии с другими степенями свободы системы  $C$ , то временную эволюцию полной системы  $C$  можно описать как унитарное преобразование с оператором  $U = \exp[-iHt/\hbar]$ , где  $H$  — гамильтониан системы  $C$ . Но унитарное преобразование не меняет ни матрицы плотности, ни величины запутывания  $E$  (см. ниже). Более того, любое состояние систем  $A$ ,  $C$  в момент времени  $t$  с помощью обратного унитарного преобразования  $U^{-1}$  можно привести к исходной полярной форме Шмидта (383). Таким образом, при унитарных преобразованиях, в частности, при эволюции систем согласно уравнению Шрёдингера величина запутывания  $E$  сохраняется.

Рассмотрим другой крайний случай, когда частица  $B$  попадает в измерительный прибор и тот производит измерение ее спина. Что при этом происходит с матрицей плотности? Если сохранить тот же самый базис  $\alpha_i, \beta_i$ , то измерение приводит к превращению

$$\rho_{AB} \rightarrow \rho_A \cdot \rho_B. \quad (388)$$

Формально мы опять имеем  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$ ,  $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$ , но сам вид матрицы изменился: раньше матрица (384) была диагональной по совместному индексу  $i$ , а после измерения  $\rho_{AB}$  превращается просто в произведение независимых матриц  $\rho_A$  и  $\rho_B$ . В разложении Шмидта коэффициенты  $c_i$  для не запутанных степеней свободы следует положить равными нулю и только один из бывших коэффициентов  $c_i$  следует заменить на единицу. Если только один из коэффициентов  $c_i$  заменяется на единицу, а все остальные коэффициенты обращаются в нуль (в результате коллапса), то запутанность  $E = 0$ .

Рассмотрим теперь промежуточный случай. Пусть система  $B$ , например, второй партнер синглета (379), попадает в сложную среду, где наряду с унитарной эволюцией объединенной системы могут вступать в игру механизмы декогерентности. Строго говоря, это означает информационную открытость объединенной системы. Но очень приближенно разрушение когерентности можно описать в виде монотонного убывания всех  $c_i^2$  со временем:

$$c_i^2 = c_i^2(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (389)$$

Если при  $t = 0$  выполнялось условие нормировки  $\sum_i^d c_i^2(0) = 1$ , то величина запутанности  $E(t)$  будет изменяться со временем по закону

$$E(t) = \left[ E(0) + \frac{t}{\tau} \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (390)$$

Как мы видим,  $E(t)$  монотонно убывает со временем только при  $E(0) > 1$ . Это значит, что модель монотонного убывания со временем всех  $c_i$  вряд ли является законной в применении к синглетному состоянию (329), когда  $E(0) = \ln 2 \cong 0,7$ . Но в случае многих уровней монотонное убывание  $c_i^2(t)$  со временем не противоречит монотонному убыванию  $E(t)$ .

Вернемся опять к паре частиц со спином  $1/2$ . Синглетное состояние (379) соответствует максимальной запутанности. Если спины частиц  $A, B$  только частично запутаны, то соответствующую волновую функцию можно записать в виде

$$\Psi(A, B) = \cos \theta |\uparrow_A\rangle |\downarrow_B\rangle - \sin \theta |\downarrow_A\rangle |\uparrow_B\rangle. \quad (391)$$

Отсюда видно, что  $c_A^2 = \cos^2 \theta$ ,  $c_B^2 = \sin^2 \theta$ . Запутанность  $E = 0$  при  $\theta = 0$ ;  $\theta = \pi/2$  и достигает максимального значения при  $\theta = \pi/4$ . Монотонное убывание  $E$  со временем можно было бы описать как поворот угла  $\theta \rightarrow 0$  или  $\theta \rightarrow \pi/2$  от первоначального значения  $\theta = \pi/4$ . Каждый из таких "поворотов" не является унитарным преобразованием и соответствует необратимому процессу разрушения запутанности.

Рассмотрим теперь, что происходит с матрицей плотности и запутанностью при унитарных преобразованиях [124]. Пусть матрица  $\rho_A = \sum_i^d c_i^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ , где  $c_i$  — действительны и положительны. Пусть  $U_{ij}$  является матрицей произвольного унитарного преобразования, так что

$$\sum_j^k U_{ji}^* U_{jl} = \delta_{il}. \quad (392)$$

Здесь целое число  $k$  может быть больше или равно  $d$ , так что в общем случае матрица  $U$  является  $k \times d$  матрицей.

Пусть ансамбль функций  $|\psi_1\rangle \dots |\psi_r\rangle$  задан преобразованием

$$|\psi_j\rangle = \sum_i^d U_{ji} |\alpha_i\rangle c_i. \quad (393)$$

Найдем матрицу плотности состояний  $|\psi_j\rangle$ :

$$\rho = \sum_j^r |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \sum_{l,i}^d \sum_j^r U_{jl} U_{ji}^* c_l c_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_l|. \quad (394)$$

Отсюда видно, что в силу условия унитарности (392) матрицы  $U$  матрица плотности  $\rho = \rho_A$ . Таким образом, любое унитарное преобразование системы  $A$  не меняет ее матрицу плотности.

Верным оказывается и обратное утверждение: если две квантовые системы с одной и той же размерностью  $d$  имеют одну и ту же матрицу плотности, то можно найти унитарное преобразование, которое переводит одну систему в другую. Это доказательство несколько сложнее (см. [124]), поскольку унитарное преобразование может относиться к системе, содержащей квантовую подсистему  $A$  как свою составную часть. Но с точки зрения физических представлений сформулированное выше утверждение кажется вполне естественным.

Что касается величины запутанности, то для доказательства ее инвариантности по отношению к унитарным преобразованиям доста-

точно иметь в виду инвариантность матрицы плотности  $\rho_{AB}$ , записанной в форме разложения Шмидта в базисе  $|\alpha_i\rangle|\beta_i\rangle$ . Отсюда следует, в частности, что величина  $E$  не меняется при унитарных преобразованиях, проводимых порознь в системах  $A$  и  $B$ . Поэтому унитарными преобразованиями в системе  $B$  никак нельзя повлиять на приведенную матрицу  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$  системы  $A$ . Отсюда следует, в частности, невозможность передачи сверхсветовых сигналов на сколь угодно большие расстояния.

Процессы измерения и процессы коллапсирования волновых функций являются необратимыми и описываются не унитарными операторами. Например, простейшие виды измерения описываются согласно фон Нейману проекционными операторами. Такие проекции в системах с дискретными спектрами уничтожают недиагональные элементы матрицы плотности. Но нельзя *a priori* утверждать, что все физически допустимые процессы коллапсирования волновых функций должны быть полными. Если речь идет об ограниченных промежутках времени, то некоторые из процессов коллапсирования могут оказаться не завершенными. Соответствующие измерения окажутся неполными, и связь систем  $A$  и  $B$  в течение некоторого промежутка времени  $\tau$  может частично сохраняться.

Рассмотрим некоторую идеализированную модель. Пусть система  $A$  представляет собой одну частицу со спином  $1/2$ , а система  $B$  состоит из  $N$  частиц со спином  $1/2$ . Пусть начальная волновая функция выглядит как

$$\Psi(A, B) = \cos \theta |\uparrow_A\rangle |\downarrow_1\rangle \dots |\downarrow_N\rangle - \sin \theta \frac{1}{\sqrt{N}} \times \\ \times \sum_m (|\downarrow_A\rangle |\downarrow_1\rangle \dots |\uparrow_m\rangle \dots |\downarrow_N\rangle). \quad (395)$$

Такое представление соответствует полярной форме Шмидта. Во втором слагаемом (395) спин номера  $m$  системы  $B$  повернут вверх, поэтому данное состояние является запутанным.

Допустим, что система  $B$  испытывает необратимый не унитарный переход  $|\downarrow_i\rangle \rightarrow |\downarrow_i\rangle - \alpha |\uparrow_i\rangle$ , где  $\alpha \ll 1$ . Тогда матрица плотности  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$  с точностью до членов первого порядка по  $\alpha$  перейдет в выражение:

$$\rho_A = \cos^2 \theta |\uparrow_A\rangle \langle \uparrow_A| + \sin^2 \theta |\downarrow_A\rangle \langle \downarrow_A| + \\ + \alpha \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \sqrt{N} (|\uparrow_A\rangle \langle \downarrow_A| + |\downarrow_A\rangle \langle \uparrow_A|). \quad (396)$$



Как мы видим, у матрицы плотности  $\rho_A$  не исчезли недиагональные члены, что свидетельствует о неполной декогерентности. Если  $N$  очень велико, то параметр  $\alpha\sqrt{N}$  может оказаться не очень малым даже при  $\alpha \ll 1$ .

Выражение (396) для  $\rho_A$  можно рассматривать как сумму полностью диагональной декогерентной части и когерентной части, образованной волновой функцией

$$\psi = a|\uparrow_A\rangle + b|\downarrow_A\rangle, \quad (397)$$

где константы  $a, b$  удовлетворяют соотношению:

$$ab = \alpha \sin \theta \cos \theta \sqrt{N}.$$

Нетрудно видеть, что рассмотренное в главе V объяснение эффекта Соколова соответствует именно такому необратимому процессу релаксации, когда когерентная часть волновой функции атома не исчезает полностью. Заметим еще, что унитарное преобразование вида  $|\downarrow_m\rangle \rightarrow |\downarrow_m\rangle - \alpha|\uparrow_m\rangle$ ;  $|\uparrow_m\rangle \rightarrow |\uparrow_m\rangle + \alpha|\downarrow_m\rangle$  матрицу плотности  $\rho_A$  не изменило бы.

Если второй партнер коррелированной пары (379) попадает в сложную квантовую систему и там испытывает взаимодействие со многими частицами, то в отсутствие необратимых процессов величина запутывания  $E$  остается постоянной. При этом число партнеров возрастает, т.е. возникает своего рода "растворение" запутывания по многим степеням свободы. Однако, как оказывается, возможен и обратный процесс "концентрации запутывания". Разумеется, самый простой способ осуществить "концентрацию" — это обратить время, т.е. осуществить обратное унитарное преобразование  $U^{-1}(t)$ . Правда, этот способ удобен для теоретических рассуждений, но трудно реализуем практически. Как показано в работе [125], можно построить более приемлемый алгоритм для концентрации запутанности, если воспользоваться механизмом телепортации. При некоторой заданной начальной запутанности ее можно сконцентрировать на меньшем количестве синглетных пар с максимальной удельной запутанностью. Такой процесс может быть осуществлен с использованием обмена только классической информацией между коррелированными системами  $A$  и  $B$ . Мы кратко изложим здесь логику статьи Беннетта и др. [125], которые используют для этой цели следующую простую модель.

Пусть имеется  $n$  ЭПР-пар частиц с неполной, но одинаковой запутанностью, так что начальное состояние системы можно запи-

сать в виде

$$\Psi(A, B) = \prod_{i=1}^n \left[ \cos \theta |\alpha_1(i)\rangle |\beta_1(i)\rangle + \sin \theta |\alpha_2(i)\rangle |\beta_2(i)\rangle \right]. \quad (398)$$

Здесь каждые из  $\alpha(i)$ ,  $\beta(i)$  можно представлять себе в виде:  $\alpha_1 = |\uparrow\rangle$ ,  $\alpha_2 = |\downarrow\rangle$ ,  $\beta_1 = |\downarrow\rangle$ ,  $\beta_2 = |\uparrow\rangle$ . Функцию  $\Psi(A, B)$  можно представить в виде суммы  $2^n$  различных слагаемых, которые можно сгруппировать в  $n + 1$  групп слагаемых при коэффициентах  $\cos^n \theta$ ;  $\cos^{n-1} \theta \times \sin \theta$ ; ...;  $\sin^n \theta$ . Их можно занумеровать индексом  $k = 0, \dots, n$ , который соответствует показателю степени при  $\sin \theta$ . Волновые функции, стоящие при множителях вида  $\cos^{n-k} \theta \sin^k \theta$ , взаимно ортогональны. Поэтому можно представить себе такую схему измерений, которая проектирует состояние  $B$  на одну из таких волновых функций. Если такая проекция привела к результату под номером  $k$ , т.е. к волновой функции при  $\cos^{n-k} \theta \sin^k \theta$ , то наблюдатель  $B$  с помощью классической информации может сообщить наблюдателю  $A$ , какой именно результат получен. Поскольку это состояние отвечает максимальной величине  $E$ , то после соответствующих унитарных операций наблюдателя в  $A$  и  $B$  могут получить состояние в виде стандартных синглетов (такой процесс и есть телепортация).

Но как оказывается, существует и более интересный метод концентрации запутанности, который был назван в работе [125] прокрустовым методом. Пусть в начальном состоянии опять имеется много пар частично запутанных состояний вида (391) с углом  $\theta \neq \pi/4$ . Для простоты допустим, что угол  $\theta$  мал. Этот факт должен быть известен наблюдателям  $A$  и  $B$  до проведения всех последующих операций: оба они должны знать, что вероятность  $\cos^2 \theta$  состояния  $|\uparrow_A\rangle |\downarrow_B\rangle$  много больше вероятности  $\sin^2 \theta$  состояния  $|\downarrow_A\rangle |\uparrow_B\rangle$ . Допустим, что у наблюдателя  $B$  имеется возможность развести поляризации  $|\downarrow_B\rangle$ ,  $|\uparrow_B\rangle$  с помощью поляризатора, а затем поглотить часть пучка  $|\downarrow_B\rangle$  так, чтобы после поглотителя осталась только  $\sin^2 \theta / \cos^2 \theta$  доля этого пучка. Потом прошедший пучок можно снова смешать с пучком  $|\uparrow_B\rangle$ . Ясно, что при таком процессе суммарная запутанность сильно уменьшится: от начального значения  $E_0 \cong n\theta^2 \ln(\sqrt{e}/\theta^2)$  она упадет до значения  $E_1 \cong n_1 \ln 2$ , где  $n_1 \cong n\theta^2$  — число оставшихся коррелированных пар. Каждая из таких пар имеет максимальную запутанность, равную  $\ln 2$ , т.е. одному биту.

У наблюдателя  $A$  останется малое количество  $n_1$  коррелированных пар и "огромный объем шлака" из  $n - n_1$  частиц в некогерентном состоянии  $|\uparrow_A\rangle$ . Отделяя частицы в состоянии  $|\downarrow_A\rangle$  с помощью поляризатора и смешивая их с когерентной частью состояний  $|\uparrow_A\rangle$ ,

наблюдатель  $A$  как бы отбросит декогерентную часть. Таким образом, концентрация запутанности в процессе по методу Прокруста использует механизм отбраковки декогерентных состояний. При этом значительная часть первоначальной величины когерентности теряется, но зато оставшаяся когерентная часть приходится на значительно меньшую долю максимально запутанных синглетных пар.

Такой процесс можно представить себе происходящим в естественных условиях. Если имеется большая неравновесная система  $C$ , содержащая  $A$  и  $B$  как свои подсистемы, то можно представить себе следующий механизм запутывания  $A$  и  $B$ . Вначале система  $C$  создает очень слабую запутанность  $A$  и  $B$ . Затем система  $C$  поглощает (т.е. коллапсирует или измеряет) большую часть запутанных состояний. Если это затухание происходит избирательно, т.е. "вымываются" компоненты запутанных состояний, которые имеют бóльшую амплитуду, то оставшиеся когерентные состояния концентрирует бóльшую удельную запутанность на каждую из коррелированных пар. Можно сказать, что необратимый процесс релаксации приводит к квантовой самоорганизации. В общем случае квантовые и классические процессы самоорганизации могут приводить к созданию очень сложно организованных физических систем.

## К главе IV. Необратимость в квантовой теории

### IV.1. Термодинамические ограничения (constraints) на аксиомы квантовой теории

При описании коллапсов волновых функций атомов газа приходится использовать понятие "самоизмерений" или "внутренних измерений". Такие самоизмерения относятся к непрерывному спектру и соответствуют коллапсированию функций в одно из не полностью ортогональных состояний. Сам темп коллапсирований пропорционален плотности атомов, поэтому речь идет о своего рода нелинейном процессе. В этой связи представляется уместным обсудить работу Переса [126]. Она имеет название "Термодинамические ограничения на квантовые аксиомы", а в аннотации к ней сказано: "Второй закон термодинамики был бы нарушен, если бы была возможность различать неортогональные состояния, или если бы уравнение Шрёдингера было нелинейным".

Статья Переса написана простым, ясным языком. Нам здесь вполне достаточно еще более простое ее изложение. Как известно,

для термодинамических рассуждений наиболее удобным физическим телом является идеальный газ. Пусть температура  $T = \text{const}$ . Тогда та часть энтропии  $S$ , которая связана с объемом газа  $V$ , равна, согласно выражению (22),

$$S = N \ln \left( \frac{V}{N} \right), \quad (399)$$

где  $N$  — полное число частиц.

Пусть тот же самый объем заполняется частицами двух сортов, так что  $N = N_1 + N_2 = N(c_1 + c_2)$ , где  $c_1, c_2$  — относительные концентрации. Тогда полная энтропия равна просто сумме соответствующих энтропий вида (399), т.е.

$$S = N \ln \left( \frac{V}{N} \right) - N[c_1 \ln c_1 + c_2 \ln c_2]. \quad (400)$$

Если полное число частиц  $N = \text{const}$  и объем  $V = \text{const}$ , то второе слагаемое может рассматриваться как энтропия смешения двух газов (аналогичное соотношение имеет место для слабых растворов в жидкости). Обозначим эту часть энтропии через  $S_c$ . Если имеется смесь многих газов, то

$$S_c = -N \sum_j c_j \ln c_j. \quad (401)$$

Допустим теперь, что мы имеем квантовую систему при температуре  $T$ . Пусть функции  $\psi_j$  представляют собой базис, т.е. полный набор ортонормированных состояний. Тогда произвольную волновую функцию  $|\psi\rangle$  можно представлять в виде

$$|\psi\rangle = \sum_j a_j |\psi_j\rangle. \quad (402)$$

Здесь амплитуды  $a_j$  можно считать действительными числами, если соответствующие фазовые множители вида  $\exp(i\alpha_j)$  внести в функции  $|\psi_j\rangle$ . При тепловом равновесии амплитуды  $a_j$  являются случайными числами, так что физический смысл имеют только вероятности  $p_j = a_j^2$ . Если у нас имеется  $N$  частиц, то величины  $p_j N$  можно рассматривать как соответствующие числа частиц  $N_j = p_j N \equiv c_j N$  в состояниях  $j$ . Соответственно, энтропия этих частиц (зависящая только от распределения вероятностей) может быть представлена в виде (401). В более формальной записи соответствующее выражение для энтропии фон Неймана имеет вид

$$S_c = -N \text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (403)$$

где символ  $Tr$  обозначает след матрицы, а  $\rho$  есть матрица плотности:

$$\rho = \sum_j a_j^2 |\psi_j\rangle \langle \psi_j|. \quad (404)$$

Последнее выражение имеет диагональный вид в ортонормированном базисе  $\psi_j$ , но простым унитарным преобразованием матрица  $\rho$  может быть переведена в любой другой базис.

Построим теперь идеальные тепловые машины, с помощью которых можно будет понять некоторые свойства смешанных квантовых ансамблей. Начать удобно с классических газов. Допустим, что у нас имеются перегородки, которые могут пропускать молекулы одного сорта и не пропускать молекулы других сортов. Возможность существования таких перегородок никак не противоречит законам термодинамики.

Пусть имеется равнокомпонентная смесь двух газов:  $c_1 = c_2 = 1/2$ . С помощью полупроницаемых перегородок можно осуществлять следующие действия. Допустим, что с помощью перегородок, не пропускающих атомы первого сорта, мы фиксируем их объем  $V$ , а с помощью перегородки второго сорта увеличиваем объем, доступный для атомов второго сорта вдвое. При этом энтропия газа увеличивается на  $\Delta S = N \ln 2/2$ , за счет чего производится работа, равная  $T\Delta S$ . Затем с помощью перегородки второго вида можно вытеснить атомы второго сорта в объем  $V$ , не доступный атомам первого сорта. При этом объем атомов второго сорта возвращается к своему прежнему значению, так что на такое вытеснение требуется затратить работу  $-T\Delta S$ . Мы возвращаемся к прежнему значению энтропии при нулевой суммарной энтропии. При этом газы оказываются в разных ящиках объема  $V$ .

Точно такого же эффекта можно достигнуть несколько иным способом. Допустим, что объем  $V$  представляет собой параллелепипед. Около противоположных торцов расположим по паре полупроницаемых перегородок. Затем продлим стенки параллелепипеда вдоль направления, перпендикулярного перегородкам и зафиксируем перегородки, не пропускающие атомы первого сорта. А перегородки, не пропускающие атомы второго сорта, будем передвигать вдоль ящика. Сохраняя расстояние между ними неизменным, мы сможем вытеснить весь газ второго сорта за пределы первого газа. После этого каждый газ будет занимать объем  $V$ , и при этом никакого изменения энтропии не происходит, и работы затрачивать не нужно. Суммарная энтропия при этом будет равна  $S = N \ln(2V/N)$ . Можно далее уменьшить объемы вдвое, так что суммарная энтропия  $S$  станет меньше:

$S' = N \ln(V/N)$ . Если позволить теперь газам свободно смешиваться, то энтропия вернется к своему прежнему значению  $S = N \ln(2V/N)$ . Таким образом, возрастание энтропии при смешивании равно  $\Delta S = N \ln 2$ .

Можно было бы представить себе, что разница между двумя сортами газа становится исчезающе малой. Тогда мы пришли бы к известному парадоксу Гиббса, который, как известно, был разрешен благодаря квантовой теории, в которой частицы одного сорта являются тождественными. А в наших рассуждениях парадокс разрешается тем, что перегородки могут различать молекулы только разных сортов.

Обратимся теперь к квантовой теории. Допустим для простоты, что у атомов газа имеется только два квантовых состояния. Например, это могут быть направления поляризации фотонов света. Согласно стандартным рецептам квантовой теории приборы могут различать между собой взаимно ортогональные состояния. Поэтому частицы в таких состояниях можно считать разными, так что мы приходим к выражению для энтропии, не отличающегося от классического (401). Не вступая в противоречие с аксиомами термодинамики и квантовой теории, можно опять представить себе существование полупроницаемых перегородок для каждого из взаимно ортогональных состояний. При этом снова будет иметь место полное согласие со вторым законом термодинамики.

Допустим теперь, что существует возможность различать не ортогональные состояния. Пусть, например, оказывается возможной мембрана, которая не пропускает через себя состояния вида  $(\psi_1 + \psi_2)/\sqrt{2}$ . В случае фотонов это было бы состояние с поляризацией, направленной под углом 45° по отношению к нормально поляризованным. Оказывается, что такое допущение сразу приводит к возможности создания вечного двигателя второго рода.

В самом деле, можно представить себе, что с помощью обычной полупроницаемой мембраны мы запираем в ящике частицы сорта 2, а частицы сорта 1 расширяем вдвое. При этом совершается работа, равная  $(T \ln 2)/2$ . Затем вставляем обычную перегородку между объемами  $V$ , и частицы в новом объеме "поворачиваем" с помощью унитарного преобразования в состояние  $(\psi_1 + \psi_2)/\sqrt{2}$ . Если имеются перегородки, не проницаемые для этого состояния и проницаемые для остальных состояний, то с помощью таких перегородок частицы в состоянии  $(\psi_1 + \psi_2)/\sqrt{2}$  можно "задвинуть" в исходный ящик. При этом никакого изменения энтропии не происходит и никакая работа не совершается. Если подождать некоторое время, то в ящике все состояния частиц перемешаются, т.е. мы перейдем к исходному

макроскопическому состоянию. Но, поскольку в первом такте цикла была совершена работа, то такой цикл позволяет совершать работу только за счет тепловой энергии. Невозможность создания вечного двигателя второго рода означает невозможность различать неортогональные состояния.

Аргументация по поводу недопустимости нелинейных членов в уравнении Шрёдингера является более тонкой, но суть ее сводится к тому же: нелинейность порождает со временем неортогональность, что противоречит неразличимости неортогональных состояний. Именно с линейностью уравнения Шрёдингера связана и невозможность клонирования одиночных квантов [97]. Поэтому окончательный вывод из работы Переса состоит в том, что второй закон термодинамики был бы нарушен, если бы можно было различать неортогональные состояния, клонировать отдельные кванты или вводить нелинейные члены в уравнение Шрёдингера.

Нетрудно видеть, что все приведенные аргументы не относятся к процессам внутренних самоизмерений. Процессы коллапсирования волновых функций в газе выглядят как слабо не ортогональные, если их выражать на языке одночастичных функций. Однако эта неортогональность не может быть выведена наружу от квантовой системы и превращена в макроскопические параметры. Нелинейность процессов коллапсирования — это не регулярная нелинейность в уравнении Шрёдингера, а результат случайных событий. Поэтому регулярный процесс развития неортогональности здесь также отсутствует. Что же касается клонирования, то оно к процессу самоизмерений никакого отношения не имеет. Поэтому процессы самоизмерений и пакетизации волновых функций атомов газа к противоречию со вторым началом термодинамики не приводят.

#### IV.2. Квантование систем с диссипацией

В модели непрерывного коллапсирования было использовано модифицированное уравнение Шрёдингера (209). В отличие от обычного уравнения Шрёдингера для квантового осциллятора в уравнении (209) член с "потенциальной энергией" имеет множитель  $i$ . Это значит, что соответствующий "гамильтониан" не является эрмитовым оператором, что явно указывает на наличие диссипации. Путем подбора параметра  $\gamma$  в этом уравнении нам удалось построить стационарное решение, соответствующее нижнему уровню осциллятора, но все другие решения являются затухающими. С точки зрения физики это означает, что любой не гауссов волновой пакет стремится со временем принять стандартную гауссову форму.

Интересно обсудить вопрос о том, в какой мере уравнение непрерывного коллапсирования укладывается в общую схему квантовых систем с диссипацией. Вопрос о том, как должно строиться уравнение Шрёдингера для диссипирующих квантовых систем, был рассмотрен в работе Энца [127]. Мы обсудим здесь вкратце основные выводы из этой работы и их отношение к уравнению непрерывного коллапсирования (209).

Самое простое обобщение уравнения Шрёдингера на случай диссипации можно представить в виде

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = (H + i\gamma H)|\psi\rangle. \quad (405)$$

Здесь  $H$  — оператор Гамильтона, а величина  $\gamma$  добавлена для учета диссипации. Для волновой функции здесь использовано обозначение Дирака:  $\psi \equiv |\psi\rangle$ .

Величину  $\gamma$  в (405) можно было бы принять за константу, но тогда мы пришли бы к нефизической задаче, когда все собственные функции оператора энергии затухали бы со временем. Чтобы сохранить разумный физический смысл уравнения (405), величину  $\gamma$  следует считать оператором.

Допустим, что гамильтониан  $H$  соответствует свободному одномерному движению одной частицы:  $H = \hbar^2 k^2 / 2m$ , где  $k$  — волновое число. Как показано в работе [127], разумное обобщение уравнения Шрёдингера в  $k$ -представлении выглядит как (405) с оператором  $\gamma$ , имеющим вид

$$\gamma = -\hbar \sum_{k, k'} |k\rangle D_{kk'} \langle k'| = \gamma^+, \quad (406)$$

где  $D_{kk'}$  — произвольная эрмитова матрица.

Как видно из этого выражения,  $\gamma$  является эрмитовым оператором.

Если  $D_{kk'} = \delta_{kk'}$ , то величина  $\gamma$  в уравнении является просто константой, так что простейший вариант уравнения (405) диссипацией  $\gamma = \text{const}$  также не исключен. Если считать  $\gamma = \delta_{kk'} / H_{kk}$ , то член  $\gamma H$  можно считать константой: это тоже один из простейших вариантов уравнения с диссипацией.

Допустим теперь, что оператор  $D_{kk'}$  связывает между собой близкие, но не равные друг другу состояния  $k, k'$ . Одно из простейших допущений состоит в том, что

$$\gamma H = \alpha \frac{\partial^2}{\partial k^2}; \quad \alpha = \text{const}. \quad (407)$$



В конфигурационном представлении имеем

$$\gamma H = -\alpha x^2. \quad (408)$$

Но тогда в уравнении (405) мы получим потенциальную энергию осциллятора с мнимым коэффициентом упругости. Если добавить сюда еще слагаемое с мнимой константой, то мы получим уравнение (209) непрерывного коллапсирования.

Итак, уравнение непрерывного коллапсирования представляет собой простейший пример квантового уравнения Шрёдингера для системы с диссипацией. Как видно, оно соответствует допущению, что диссипация вовлекает в перемешивание только близкие друг к другу  $k$ -уровни. Ясно, что такое допущение в точности соответствует гипотезе непрерывного коллапсирования.

## К главе V. Эффект Соколова

### V.1. Эффект Соколова как результат когерентной суперпозиции ЭПР-взаимодействий

В разделе 42 была описана качественная теория эффекта Соколова, основанная на газовом приближении для кинетики свободных электронов в металле. Здесь мы обсудим вопрос о том, почему предлагаемая система представлений кажется наиболее приемлемой.

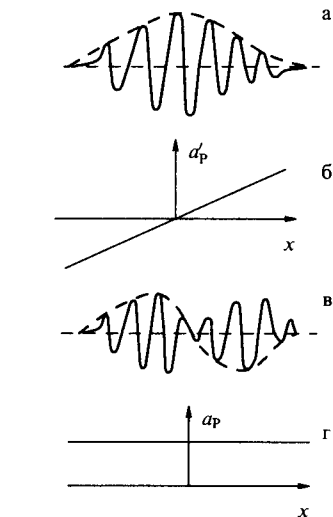
Начнем с оценки числа электронов  $N$ , принимающих участие во взаимодействии с возбужденным атомом водорода. Если атом пролетает на расстоянии  $l$  от образца металла (т.е. от достаточно узкой диафрагмы), то он за время пролета  $t = l/v_0$  успевает провзаимодействовать с  $N \sim l^2 n v_F t$  электронами. Здесь фактор  $l^2$  учитывает величину эффективной поверхности,  $n = T n_0 / \varepsilon_F$  есть плотность свободных электронов выше уровня Ферми,  $v_F$  — скорость электронов на границе Ферми, так что  $N \sim l^3 n_0 T v_F / v_0 \varepsilon_F$ . При  $l \sim 10^{-2}$  см,  $v_0 \sim v_F$ ,  $T / \varepsilon_F \sim 10^{-2}$  и  $n_0 \sim 10^{23}$  см $^{-3}$  находим  $N \sim 10^{15}$ . Как мы видим, каждый акт пролета атома вблизи поверхности металла вовлекает во взаимодействие фантастически большое число электронов.

Рассмотрим волновую функцию одного из таких электронов. Для наглядности рассуждений допустим, что эта волновая функция выглядит как волновой пакет с огибающей  $a(x)$ , похожей на функцию Гаусса (рис. 49а). Координата  $x$  отсчитывается вдоль направления распространения пакета. Допустим, что волновой пакет налетает на границу металла и затем, слой за слоем, отражается от границы

металла и улетает в его глубину. На границе металла электрон может взаимодействовать с возбужденным атомом, создавая в нем

малую добавку  $a'_p$  состояния 2P из состояния  $a_s \approx 1$ , относящегося к 2S уровню. Как было аргументировано в основном тексте книги, электрическое поле электрона в значительной мере компенсировано обратным по знаку полем ионного остова. Но амплитуда 2P состояния  $a'_p$  может быть отлична от нуля за счет того, что атом водорода движется,  $v_0 \neq 0$ . Эту добавку к 2P состоянию можно считать пропорциональной  $x$ , где  $x$  отсчитывается от центра пакета (см. рис. 49а). В среднем по волновому пакету амплитуда  $a'_p$  обращается в нуль.

Как мы видим, волновые функции электрона  $a(x)$  и атома  $a'_p$  оказываются запутанными: амплитуда  $a'_p$  атома является функцией координаты электрона, отсчитываемой от центра волнового пакета, запрятанного глубоко внутрь металла. Функция  $a(x)a'_p$  является совместной функцией атома и электрона, и ее можно на столь же законных основаниях представить в виде  $xa(x) \cdot a_p$ , где  $a_p = \text{const}$  (см. рис. 49в, г).



**Рис. 49.** На рисунках (а, б) изображена волновая функция свободного электрона в виде волнового пакета с огибающей  $a(x)$ ; ему соответствует "запутанная" амплитуда  $a'_p$  атома водорода, антисимметричная относительно продольной координаты  $x$ . На рисунках (в, г) то же самое состояние имеет антисимметричную огибающую  $xa(x)$  и  $a_p = \text{const}$ .

Если мы учтем все  $N$  электронов, то волновую функцию атома и электронов металла можно представить в виде

$$\Psi = a_s \phi_0 + a_p \phi_1. \quad (409)$$

Здесь  $a_s$  и  $a_p$  — амплитуды состояний 2S и 2P возбужденного атома водорода,  $\phi_0$  — невозмущенная функция всех  $N$  электронов металла (принимавших участие во взаимодействии), а функция  $\phi_1$  соответствует суперпозиции, в которой одна из индивидуальных функций соответствует несимметричному волновому пакету вида (рис. 49в). Форма представления сложной волновой функции  $\Psi$  многих частиц в виде суммы (409) называется полярной формой Шмидта (или представлением Шмидта). Два слагаемых в (409) ортогональны друг другу:

амплитуды  $a_S$  и  $a_P$  соответствуют ортогональным состояниям электрона внутри атома, а волновая функция  $\phi_1$ , содержащая волновые пакеты вида  $\chi a(x)$ , ортогональна  $\phi_0$  с пакетами вида  $a(x)$  очевидным образом (ср. рис. 40а и в).

Как мы видим, согласно соотношению (409) состояниям 2S и 2P атома соответствуют кардинально различные волновые функции электронов металла: пока в игру не вступили необратимые механизмы релаксации, металл "запоминает" всю историю предыдущего взаимодействия.

Согласно (409) волновая функция  $\Psi$  соответствует запутанному состоянию: функция  $\Psi$  не может быть представлена в виде простого произведения волновой функции атома на волновую функцию электронов металла. Если функции  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  считать нормированными на единицу, то величину запутывания (в битах) согласно [125] можно представить в виде:

$$E = -|a_S|^2 \log_2 |a_S|^2 - |a_P|^2 \log_2 |a_P|^2. \quad (410)$$

Заметим, что предположение о существовании пакетов рис. 49 использовано нами для наглядности. Что касается представления  $\Psi$  в виде полярной формы Шмидта (409), то оно является гораздо более универсальным и не зависит от конкретной формы волновых функций электронов.

Предположим теперь, что над функцией  $\Psi$  производятся измерения. Например, это может быть регистрация кванта лайман-альфа в фотодетекторе. Согласно традиционным представлениям такое измерение должно спроектировать волновую функцию  $\Psi$  на одно из взаимно ортогональных состояний. А именно, срабатывание фотодетектора должно согласно (409) означать не только факт наличия состояния 2P у атома водорода, но и одновременно переход от невозмущенной функции  $\phi_0$  к ортогональной функции  $\phi_1$  у одного из  $N \sim 10^{15}$  электронов металла, принявших участие во взаимодействии. Исходя из представлений об абстрактных операторах проектирования, такую возможность исключить нельзя. Но более естественной представляется картина, когда "измерение" происходит за счет декогерентности электронов внутри металла.

При этом коллапсы волновых функций электронов металла ("самоизмерения") происходят сами собой в силу естественной необратимости квантовых процессов в металле. Тогда у атома должна сначала появиться амплитуда  $a_P$  и только вслед за этим детектор может зафиксировать факт распада этого состояния.

Если так, то можно представить себе, что только один из  $N$  электронов в функции  $\phi_1$  испытывает коллапс. Такой процесс соответ-

ствуется неупругому процессу взаимодействия атома с одиночным электроном [127]. Вероятность соответствующего процесса можно найти, вычисляя амплитуду  $a_p$  для одного электрона и умножая затем квадрат амплитуды на все  $N$  атомов, принявших участие во взаимодействии.

Величину приращения амплитуды  $\Delta a_p$  от одного электрона можно оценить с помощью соотношения (271) (оно соответствует передаче электрону кванта  $\sim \hbar\omega_\tau$ , где  $\omega_\tau$  — частота лэмбовского сдвига). По порядку величины получаем  $\Delta a_p \sim e d l_* / \hbar l^2 v_F$ , где  $d$  — дипольный момент атома (по отношению к  $2S \rightarrow 2P$  переходу),  $l_* = n_0^{-1/3}$ . А для квадрата амплитуды  $2P$  состояния получаем оценку  $a_p^2 \sim N(\Delta a_p)^2 \sim 10^{-2} l_* / l$ . При  $l_* / l \sim 10^{-6}$  эта величина очень мала:  $a_p^2 \sim 10^{-8}$ . Другими словами, вероятность неупругого столкновения остается очень малой вплоть до  $l \sim l_*$ .

Но остается еще одна возможность, которая и приводит к эффекту Соколова. Если коллапсирование электронов происходит с малой асимметрией, то вклады во второе слагаемое в (409) не уничтожаются "индивидуальными измерениями" электронов, а суммируются, и притом когерентно. Амплитуда  $a_p$  набирается теперь суммированием  $N$  индивидуальных амплитуд за счет энергии в формуле (272). Если асимметрия волнового пакета электрона характеризуется малым смещением центра пакета на величину  $\langle x \rangle \sim l_*$ , то энергию (272) можно оценить как  $\Delta U \sim e d l_* v_0 / v_F l^3$ . Соответственно, вклад в амплитуду  $\Delta a_p$  от одного электрона имеет порядок величины  $\Delta a_p \sim e d l_*^2 v_0 / \hbar v_F l^3$ . Вследствие эффекта когерентности эти амплитуды складываются, так что суммарный набег амплитуды  $a_p$  становится порядка  $a_p \approx N \Delta a_p \approx e d n_0 l_*^2 T / \hbar v_F \epsilon_F$ . Так как  $d \sim e n_0^{-1/3}$ ,  $l_* \sim n_0^{-1/3}$ ,  $e^2 / \hbar v_F \sim 1$ , то получаем оценку для эффекта Соколова  $a_p \sim T / \epsilon_F \sim 10^{-2}$ . После релаксации электронов совместная волновая функция  $\Psi$  вновь факторизуется, но атом оказывается в суперпозиции  $(2S + 2P)$ -состояний.

Нетрудно видеть, что процесс последовательного коллапсирования волновых функций электронов неизбежно приводит к эффекту запаздывания. Пусть  $t_0$  — соответствует моменту (отсчитываемого от момента  $t = 0$  предшествующего коллапса) отражения волнового пакета от границы металла. Именно на волновом пакете  $\psi(x, t_0)$  и записывается информация  $a_p(x)$ , изображенная на рис. 49б). Чтобы коллапс, последующий за этим взаимодействием, смог дать отличный от нуля несимметричный вклад в  $\phi_1$ , должно пройти некоторое время. Отсчитываемая от  $t = t_0$  несимметрия коллапса  $\langle x \rangle_t - \langle x \rangle_{t=t_0}$  должна накопиться. Характерное время этого накопления составляет величину порядка  $\tau$ . Именно на величину порядка  $\tau$  должен быть сдвинут

максимум производной по времени от  $a_{2P}(t)$  (если не учитывать распады  $2P$ -состояний).

Итак, если придерживаться представлений о том, что измерения в квантовой механике не являются чем-то мистическим, а представляют собой естественный продукт декогерентности, то мы приходим к той картине эффекта Соколова, которая была изложена в книге. Эффект представляет собой результат когерентного сложения очень многих взаимодействий Эйнштейна – Подольского – Розена. Каждый свободный электрон проводимости металла образует ЭПР-пару с возбужденным атомом водорода. При последующей релаксации волновой функции этого состояния у атома водорода появляется малая добавка к амплитуде  $2P$ -состояния. Поскольку речь идет о суммировании очень малых вкладов от огромного числа электронов, то суммарный эффект можно описать на языке корреляционного электрического поля  $E_*$ . Это поле не может быть измерено макроскопическим прибором, поскольку оно носит сугубо корреляционный характер. Однако в некотором отношении у него можно найти черты, делающим его похожим на обычное электростатическое поле.

## V.2. Электростатика корреляционного поля $E_*$

Чтобы понять, в чем сходство и в чем различие корреляционного поля  $E_*$  в сравнении с обычным электростатическим полем, удобно рассмотреть взаимодействие возбужденного атома водорода с металлическим образцом произвольной формы. Для этого достаточно лишь слегка обобщить соотношения (280), (281).

Пусть атом водорода в  $2S$  состоянии движется со скоростью  $v_0$  вдоль оси  $x$ . Координаты атома обозначим через  $x, y = 0, z$ . Координаты элемента поверхности металла, который "видит" летящий атом, обозначим через  $x', y', z'$ . Для простоты мы допустим, что образец является однородным вдоль поперечной координаты  $y'$ . Элемент дуги поперечного сечения образца (при  $y' = 0$ ) обозначим через  $dl$ . Тогда общее выражение для корреляционного поля  $E_*$  можно представить в виде

$$E_* = -\Phi_* \int_a^b dl \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{r^3}, \quad (411)$$

где  $r = [(x - x')^2 + y'^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ , интеграл по  $dl$  берется только по "видимой" части  $ab$  дуги сечения  $y' = 0$  (рис. 50), а константа  $\Phi_*$  дается выражением (276).

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$F = -\Phi_* \int_a^b dl \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \frac{x-x'}{r^3}. \quad (412)$$

Эта функция по своему выражению через интеграл выглядит как потенциал электрического поля, создаваемого двойным слоем с

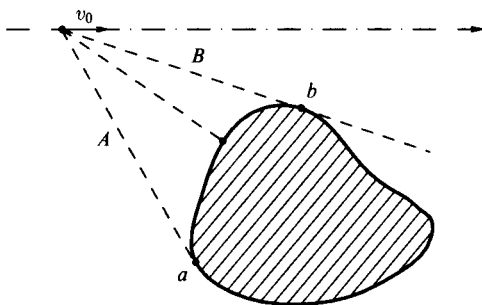


Рис. 50. Атом водорода при взаимодействии с металлическим образцом произвольной формы "видит" только часть металлической поверхности между лучами  $A$  и  $B$ . Соответственно, для данного положения атома интегрирование по  $dl$  проводится только по дуге  $ab$ .

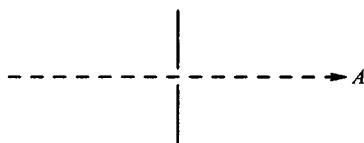


Рис. 51. Атом  $A$  пролетает сквозь узкую щель в тонкой диафрагме.

фрагмы поле  $F = -2\pi\Phi_*x/|x|$ . Поэтому производная от  $F$  по  $x$  может быть приближенно представлена в виде

$$E_* = \frac{\partial F}{\partial x} = -4\pi\Phi_*\delta(x). \quad (413)$$

Если вместо щели оставить только одну пластину, убрав вторую половину, то корреляционное поле  $E_*$  можно приближенно представить в виде  $E_* = -2\pi\Phi_*\delta(x)$ .

дипольной плотностью  $\Phi_*$ . Если точки  $a$  и  $b$  соответствуют ребрам образца, то  $E_* = \partial F/\partial x$ . В этом случае  $F$  и  $E_*$  являются гармоническими функциями в тех областях пространства, где видны одни и те же грани образца. В общем же виде связь между  $F$  и  $E_*$  более сложная, так как при смещении атома в плоскости  $x, z$  точки  $a, b$  также смещаются. По этой причине  $E_*$  в общем случае нельзя представить в виде производной по  $x$  от некоторого потенциала. Но в частных случаях такое представление возможно.

Рассмотрим, например, самый простой случай тонкой узкой диафрагмы (рис. 51). Вдали от диафрагмы

### V.3. Коллапсы волновых функций

Вопрос о коллапсах волновых функций возник в самые первые годы становления квантовой теории. С тех пор он не перестает быть предметом дискуссий и самых разных точек зрения.

С математической точки зрения этот вопрос был проанализирован фон Нейманом [2]. Он различает два непохожих друг на друга процесса: непрерывную эволюцию квантовой системы в соответствии с уравнением Шрёдингера между измерениями и случайные проекции на одно из возможных состояний при измерении. Второй процесс не описывается уравнением Шрёдингера и является случайным. Но согласно фон Нейману этот случайный процесс не может быть описан и в терминах скрытых параметров. Разбиение процессов эволюции только на два типа без физически ясного описания самого явления коллапса не мог удовлетворить физиков с образным мышлением. Поэтому вопрос о коллапсах оставался и продолжает оставаться предметом оживленных дискуссий. К его объяснению были намечены многие, часто сильно различающиеся подходы.

Существует, например, точка зрения А. Переса [129, 130], что проблемы коллапсов вообще нет, поскольку "вектор состояния нельзя приписать отдельной системе, а только ансамблю систем". Соответственно, волновая функция становится не свойством системы, а только "процедурой" для вычисления вероятностей, но с таким подходом трудно согласиться. Перес добавляет в своей статье [130]: "Те из читателей, которые привержены позиции "реализма", не примут моего подхода, но тогда это их проблема, как объяснить удивительные события..." при измерениях. Прямо противоположная точка зрения, напротив, допускает динамическое описание коллапса [131] и существование спонтанных коллапсов [132] даже у свободной частицы. Для описания таких коллапсов уравнение Шрёдингера предлагается дополнить феноменологическим слагаемым со стохастичностью. Поскольку при этом изменяется динамика даже свободной частицы, данный подход должен привести к кардинальному изменению основ квантовой механики, для чего пока не видно достаточных оснований.

Более естественными представляются подходы, которые связывают коллапсы с влиянием сложного внешнего окружения [133–135]. Моделируя взаимодействие с внешним окружением бассейна осцилляторов, Унру и Зурек [136] в самом деле обнаружили возможность коллапса волновой функции перевернутого маятника. Можно полагать, что аналогичным образом коллапсы волновых функций должны происходить и в системах, классические аналоги которых имеют разбегающиеся траектории в фазовом пространстве. Простейшей из

таких систем является обычный газ. Естественно допустить поэтому, что газ является усилителем стохастичности как классической, так и квантовой. Если это так, то мы приходим к естественной картине квантового молекулярного хаоса, когда усиление внешней стохастичности проявляется в виде коллапсирования волновых функций атомов газа при их рассеянии и последующей сложной декогерентности.

Предполагая, что такая декогерентность проявляется в уничтожении волновых функций там, где атомов нет, мы естественно приходим к описанию газа в терминах волновых пакетов. Каждый из таких пакетов взаимодействует с другими атомами, порождая рассеянные волны, а затем коллапсирует в один из возможных рассеянных пакетов. При таком подходе волновые функции атомов газа приобретают информационный характер, и механизм уничтожения волн там, где частица отсутствует, является вполне естественным.

Коллапсы волновых функций атомов газа приводят к коллапсам волновых функций других частиц, взаимодействующих с газом. Таким образом, газ можно рассматривать как измерительный прибор: он легко выполняет самый деликатный этап процесса измерения — коллапс волновой функции.

Коллапсы волновых функций не являются произвольными: они подчиняются универсальной наложенной извне связи — вероятности коллапсов должны быть пропорциональны  $|\psi|^2$  для соответствующего состояния. Этот универсальный закон не позволяет создать сверхсветовую коммуникацию на произвольно больших расстояниях. Но коллапсы индивидуальных волновых функций в газе, в том числе в газе свободных электронов, допускают малое отклонение от универсального закона  $|\psi|^2$ , если взаимодействие сложной системы большого количества электронов описывать на языке индивидуальных волновых пакетов. Обычно такое малое отклонение от закона  $p \sim |\psi|^2$  не играет большой роли, но оно является ключевым для объяснения эффекта Соколова. Соответственно, на базе эффекта Соколова можно представить себе передачу информации посредством квантовых корреляций на сравнительно небольших расстояниях. Существенную роль при этом играют необратимые процессы релаксации электронов проводимости в металле.

Итак, если стоять на позициях реалистического подхода, то коллапсы волновых функций следует рассматривать как реально протекающие процессы. Коллапсы волновых функций могут происходить внутри физических систем, как своего рода "внутренние измерения" или "самоизмерения". Именно такие процессы имеют место при эволюции волновых функций атомов газа или броуновских



частиц в газе. Еще более четко коллапсы волновых функций проявляются при обычных "внешних" измерениях: при этом одновременно коллапсируют функции измеряемого микрообъекта и измерительного прибора. Такой коллапс четко демонстрирует квантовую корреляцию двух систем — микрообъекта и прибора.

При коллапсе коррелированных систем происходит обмен информацией, связанный со случайным выбором одного из коррелированных состояний. Вопрос состоит в том, является ли этот обмен чисто случайным или он скрывает в себе возможности для управляемой передачи информации, накапливаемой многими микрообъектами. Поскольку коллапсы скоррелированных систем могут происходить в течение достаточно коротких интервалов времени, то возможность передачи информации посредством квантовых корреляций перекликается с возможностью сверхсветовых коммуникаций. Ясно, что сверхсветовая передача сигналов на большие расстояния вступает в противоречие с принципом относительности. Поэтому мгновенная передача сигналов на очень большие расстояния запрещена. Согласно работам [92–95] этот запрет следует из общего принципа квантовой механики, что вероятности событий пропорциональны  $|\psi|^2$ . Можно сказать и наоборот: из принципа относительности следует случайность квантовых событий и закон  $p \sim |\psi|^2$  (см. по этому поводу [137]). Однако в сложных необратимых системах внутренний обмен информацией за счет квантовых корреляций, в том числе сверхсветовой обмен информацией, кажется не запрещенным.

## К главе VI. Информационно открытые системы

Главная трудность квантовой теории — кардинальное отличие квантового микромира от классического макромира — появилась с первых шагов становления этой теории и продолжает быть объектом многочисленных дискуссий вплоть до настоящего времени.

Именно из-за неопределенности границы между микромиром и макромиром (и даже наблюдателем) возникли различные интерпретации квантовой теории. К настоящему времени наибольшее признание получила интерпретация Копенгагенской школы. Согласно этой концепции эволюция микромира, изолированного от макромира, описывается уравнением Шрёдингера. При этом макроскопическая обстановка такой эволюции создается макроскопическим классическим окружением, а взаимодействие микрообъектов с макромиром происходит только в приборах и выглядит как случайный процесс. Вероятности соответствующих случайных событий при измерениях

следуют принципу Борна: вероятности событий пропорциональны квадратам амплитуд волновой функции.

Хотя такая интерпретация и кажется наиболее удовлетворительной, она оставляет без ответа два вопроса: что такое классическое тело с точки зрения квантовой теории и чем определяется случайность событий при измерениях. После того, как был открыт целый ряд макроскопических квантовых явлений, стало ясно, что классическое поведение макротел не является универсальным, а зависит от конкретных макроскопических условий. Наиболее приемлемой кажется точка зрения, что классическое поведение макротел создается их взаимодействием с макроскопическим окружением. В работах Зурека и примыкающих к ним статьях (см. [138–141] и цитируемую там литературу) высказана основополагающая идея о том, что классическое поведение макротел объясняется их взаимодействием с внешним окружением. Такое взаимодействие, согласно Зуреку, выглядит как постоянный мониторинг (измерение) макротел окружающей средой. Предложенный им термин "Environment — Induced Superselection" (суперселекция, индуцированная окружением) отражает тот факт, что внешнее окружение в силу огромного числа его измерений должно разрушать когерентность между различными квантовыми состояниями макроскопических тел. Соответствующая декогерентность и должна приводить к классическому описанию макротел, связанных с внешним окружением.

Для моделирования такого процесса Унру и Зурек [141] рассмотрели точно решаемую задачу о поведении квантового гармонического осциллятора, взаимодействующего с одномерным безмассовым скалярным полем. Рассмотренная модель броуновского движения в самом деле позволяет описать потерю когерентности и редукцию волнового пакета. В работах [142, 143] Джоос и Зее обратили внимание на то, что для пакетизации волновой функции макротела следует привлечь механизм "неполных измерений", рассеивающихся на макротеле микрочастиц. Оценка [143] соответствующего темпа сжатия волнового пакета микрочастицы со временем отличается от приведенной нами в разделе 37 только численным множителем. Разница возникает из-за того, что для описания коллапсирования волновой функции Джоос использовал [143] формализм матрицы плотности, в то время как в данной книге используется более прямой и, на мой взгляд, более адекватный метод волновых пакетов.

Поясним еще раз, почему естественный подход к проблеме декогерентности приводит и формализму волновых пакетов. Для упрощения логики рассуждений удобно стартовать с разрешенного газа при не очень низкой температуре. Как подчеркивают Пригожин,

Петроски [56, 81, 82], в таком газе атомы испытывают не прекращающиеся столкновения. С точки зрения механики газ представляет собой систему с неразделяющимися переменными. По этой причине газ классических частиц обладает динамической стохастичностью, которая при ничтожно малых внешних возмущениях приводит к необратимому статистическому поведению такой системы. Что-то похожее должно происходить в газе квантовых частиц.

А именно, с точки зрения квантовой механики каждый акт рассеяния частиц друг на друге выглядит как рассеяние волновой функции. Каждый акт парных столкновений можно описать на языке сначала сходящихся, а потом расходящихся волн. В замкнутой системе частиц такая "паутина" из сходящихся и расходящихся волн может существовать сколь угодно долго. Но в открытой системе многократно сходящиеся волны (при многих повторных рассеяниях) не смогут существовать из-за того, что такой процесс требует очень точной "настройки" сходящихся волн. Взаимодействие с внешним окружением уничтожает целую половину возможных состояний, оставляя только расходящиеся волны (при многих повторных столкновениях).

Такой процесс разрушения когерентности позволяет сделать кардинальный шаг: кинетика открытой квантовой системы не описывается уравнением Шрёдингера. Это утверждение следует понимать так: волновой функции  $\psi$  открытой системы следует приписать информационный смысл. Другими словами, в процессе ее эволюции со временем наряду с эволюционным развитием согласно уравнению Шрёдингера не следует исключать возможности процессов с уничтожением волновой функции в некоторых достаточно обширных областях пространства (на языке математики такой процесс выглядит как случайный "переброс" системы в "другое гильбертово пространство"). При таком подходе у волновой функции  $\psi$  появляются черты, делающие ее похожей на вероятность. У вероятности существует два вида эволюции — регулярное ее изменение согласно дифференциальному уравнению Фоккера–Планка (или дискретной цепи Маркова) и скачок при реальном событии. Точно так же и у  $\psi$ -функции существует два возможных вида эволюции: согласно уравнению Шрёдингера в отсутствие связи с внешним окружением и квантовый скачок при "измерении", т.е. при отклике на связь с внешним миром. Волновая функция как бы медленно "выжидает", совершая цепочку обратимых унитарных преобразований, чтобы потом "принять решение" и осуществить коллапс. Такое "принятие решения" очень похоже на выпадение того или иного числа на грани кубика. Можно сказать, что это "решение принимается"

самой системой и ее окружением. Существовавшие до того "намерения" превращаются в "решение": квантовая потенциальность превращается в классическую актуальность. Как показано в книге, для описания обоих аспектов поведения квантовых систем наиболее удобный подход может быть развит на основе уравнения типа Ланжевена. В таком уравнении с равным основанием можно учесть регулярную эволюцию в соответствии с уравнением Шрёдингера и коллапсы волновых функций.

При описании сложных квантовых систем, например, броуновской частицы в газе, нет нужды явно учитывать процессы декогерентности за пределами системы (т.е. данного макрообъема газа). Сама сложность системы гарантирует декогерентность при сколь угодно малом взаимодействии с внешним окружением. Достаточно просто иметь в виду, что данная система является открытой. Поскольку взаимодействие может быть очень малым, то представляется удобным использовать термин "информационно открытая система".

Весь мир в целом можно считать информационно открытой системой (такой подход представляется гораздо более правильным, чем считать ее замкнутой системой). Поэтому полная квантовая теория должна включать в себя два круга явлений. Со стороны микромира — это привычный мир квантовых явлений, подчиняющихся уравнению Шрёдингера. Со стороны макромира — это столь же привычный классический мир, возникший и поддерживаемый вследствие того, что все макрообъекты имеют сколлапсированные и не прекращающие коллапсировать волновые функции из-за взаимодействия с внешним окружением. А на границе между ними находится мезомир.

К мезомиру можно двигаться из двух направлений. Со стороны микромира описание мезоскопических явлений можно проводить с помощью уравнения Шрёдингера, дополненного необходимыми слагаемыми (которые могут быть малы при достаточной изолированности системы), учитывающими слабое взаимодействие с внешним окружением. А при движении со стороны макромира следует учитывать постоянный мониторинг классических тел внешним окружением. На границе соприкосновения этих подходов и требуется новый аппарат для описания мезомира. Он должен включать в себя, в частности, аппарат для описания квантовых измерений.

Как можно было видеть на целом ряде конкретных примеров, приведенных в книге, мезомир может обнаруживать огромное богатство информационных явлений. Для их описания явно не достаточен аппарат матрицы плотности и управляющего уравнения (master equation). Для целого ряда явлений большую роль играют фазовые

---

соотношения (аналог недиагональных элементов матрицы плотности). Для их описания большее удобство представляют более наглядные методы: метод волновых пакетов, матрицы распределения, кинетического уравнения для амплитуд и т.д. Как мы видели, во всех этих процессах огромную роль играют квантовые корреляции, т.е. запутанность взаимодействующих (или взаимодействовавших) квантовых систем с соответствующими ЭПР-парами частиц.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В А *ЖЭТФ* **42** 1135 (1962)
2. von Neumann J *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Berlin: Springer, 1932); перевод: фон Нейман Дж. *Математические основания квантовой механики* (М.: Физматгиз, 1963)
3. Джеммер М *Эволюция понятий квантовой механики* (М.: Наука, 1985)
4. Марков М А *О трех интерпретациях квантовой механики* (М.: Наука, 1991)
5. Herbert N *Elemental mind* (New York: PLUME, 1993) Chapter 5
6. Schrödinger E *Naturwissenschaften* **23** 807, 844 (1935)
7. Фейнман Р, Хибс А *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (М.: Мир, 1968) с. 35
8. Einstein A, Podolsky B, Rosen N *Phys. Rev.* **47** 777 (1935); перевод: УФН **16** (4) 440 (1936)
9. Szilard L *Z. Phys.* **53** 840 (1929)
10. Orlov Yu *Int. J. Theor. Phys.* **21** 37 (1982)
11. Николис Г, Пригожин И *Самоорганизация в неравновесных системах* (М.: Мир, 1979)
12. Кант И *Критика чистого разума* (М.: Мысль, 1994) с. 278
13. Кадомцев Б Б *УФН* **164** 449 (1994)
14. Хартли Р *Передача информации* (М.: ИЛ, 1957)
15. Шеннон К *Работы по теории информации и кибернетике* (М.: ИЛ, 1963)
16. Бриллюэн Л *Наука и теория информации* (М.: Сов. радио, 1975)
17. Стратонович Р Л *Теория информации* (М.: Сов. радио, 1975)
18. Поплавский Р П *Термодинамика информационных процессов* (М.: Наука, 1981)
19. Landauer R *IBM J. Res. Dev.* **3** 113 (1961)
20. Bennett C H *Int. J. Theor. Phys.* **21** 305 (1983)
21. *Proc. 3rd Int. Symp. Found. Quant. Mech. Tokyo, 1989* (Tokyo: Physical Society of Japan, 1989)
22. Namiki M, Pascazio S *Phys. Rep.* **253** 301 (1993)
23. Швингер Ю. *Квантовая кинематика и динамика* (М.: Наука, 1992)
24. Everett H III *Rev. Mod. Phys.* **29** 454 (1957)
25. Yurke B, Stoler D *Phys. Rev. Lett.* **57** 13 (1986)
26. Davidovich L, Maalé A, Brune M, Raimond J M, Haroche S. *Phys. Rev. Lett.* **71** 2360 (1993)
27. Caldeira A O, Leggett A J *Phys. Rev. A* **31** 1059 (1985)
28. Brune M, Davidovich L, Haroche S, Raimond J M, Zagury N *Phys. Rev. A* **45** 5193 (1992)
29. Bell J S *Physics* (Long Island City, N.Y.) **1** 195 (1965)
30. Bohm D *Phys. Rev.* **85** 66 180 (1952)
31. Aspect A, Dalibard Y, Roger G *Phys. Rev. Lett.* **49** 1804 (1982)
32. Kiess T E, Shih V H, Sergienko A V, Alley C O *Phys. Rev. Lett.* **71** 3893 (1993)

33. Ekert A K *Phys. Rev. Lett.* **67** 661 (1991)
34. Bennett C H, Brassard G, Mermin N D *Phys. Rev. Lett.* **68** 557 (1992)
35. Bennett C H, Wiesner S J *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881 (1992)
36. Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, Jorsa R, Peres A, Wootters W K *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895 (1993)
37. Braunstein S L, Mann A, Revzen M *Phys. Rev. Lett.* **68** 3259 (1992)
38. Schumacher B *Phys. Rev. A* **51** 2738 (1995)
39. Bennett C H, Bernstein H J, Popescu S, Schumacher B *Phys. Rev. Lett. A* **53** 2046 (1996)
40. Bennett C H *Physics Today* **48** 24 (1995)
41. Di Vincenzo D *Phys. Rev. A* **51** 1015 (1995)
42. Barenco A, Deutsch D, Ekert A, Jozsa *Phys. Rev. Lett.* **74** 4083 (1995)
43. Sleator T, Weinfurter H *Phys. Rev. Lett.* **74** 4087 (1995)
44. Monroe C, Meekhof D, King B, Itano W, Wineland D *Phys. Rev. Lett.* **75** 4714 (1995)
45. Turchette Q, Hood C, Lange W, Mabushi H, Kimble H J *Phys. Rev. Lett.* **75** 4710 (1995)
46. Davidovich L, Zagury N, Brune M, Raimond J M, Haroche S *Phys. Rev. A* **50** R895 (1994)
47. Schwarzschild B *Physics Today* **49** 21 (1996)
48. Shor P W *Proc. of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science* (Los Alamos, Calif.:IEEE Computer Society Press, 1994) p. 124
49. Landauer R *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **353** 367 (1995)
50. Haroche S, Raimond J-M *Physics Today* **49** 51 (1996)
51. Герштейн С С, Берестецкий В Б *Физическая энциклопедия* Т. 2 (М.: Советская энциклопедия, 1990) с. 273
52. Baggot J *The Meaning of Quantum Theory* (Oxford: Oxford Univ. Press, 1994)
53. Пригожин И *От существующего к возникающему* (М.: Наука, 1985)
54. Майоров С А, Ткачев А Н, Яковленко С И *УФН* **164** 297 (1994)
55. Пригожин И, Стенгерс И *Время, хаос, квант* (М.: Прогресс, 1994)
56. Petrosky T, Prigogine I *Physics. Lett. A* **182** 5 (1993)
57. Starr H P *Nuovo Cimento B* **40** 191 (1977)
58. Misra B, Sudarshan E C G *J. Math. Phys.* **18** 756 (1977)
59. Itano W M, Heinzen D J, Bollinger J J, Wineland D J *Phys. Rev. A* **41** 2295 (1990)
60. Cook R J *Phys. Scripta* **T21** 49 (1988)
61. Ballentine L E *Phys. Rev. A* **43** 5165 (1991)
62. Petrosky T, Tasaki S, Prigogine I *Phys. Lett. A* **151** 109 (1990)
63. Petrosky T, Tasaki S, Prigogine I *Physica A* **170** 306 (1991)
64. Peres A, Ron A *Phys. Rev. A* **42** 5720 (1990)
65. Pascazio S, Namiki M, Badurek G, Rauch H *Phys. Lett. A* **179** 155 (1993)
66. Home D, Whitaker M A B *J. Phys. A* **25** 657 (1992)
67. Ghirardi G C, Omero C, Weber T, Rimini A *Nuovo Cimento A* **52** 421 (1979)
68. Inagaki S, Namiki M, Tajiri T *Phys. Lett. A* **166** 13 (1992)
69. Pascazio S, Namiki M *Phys. Rev. A* **50** 4582 (1994)
70. Nakazato H, Namiki M, Pascazio S, Rauch H *Phys. Lett. A* **199** 27 (1995)
71. Venugopalan A, Ghosh R *Phys. Lett. A* **204** 11 (1995)
72. Pati A K *Phys. Lett. A* **215** 7 (1996)
73. Schwinger J J. *Math. Phys.* **2** 407 (1961)

74. Caldeira A O, Leggett A J *Physica A* **121** 587 (1983); *A* **130** 374(E) (1985)
75. Leggett A J, Chkravarty S, Dorsey A T, Fosher M P A, Garg A, Zwirger W *Rev. Mod. Phys.* **59** 1 (1987)
76. Kleinert H, Shabarov S V *Phys. Lett. A* **200** 224 (1995)
77. Machida S, Namiki M, in *Proc. 3rd Int. Symp. Found. Quant. Mech. Tokyo, 1983* (Tokyo: Physical Society of Japan, 1983) p. 127
78. Namiki M *Stochastic Quantization* (Berlin: Springer, 1992)
79. Кадомцев Б Б, Кадомцев М Б *ЖЭТФ* **108** 1634 (1995)
80. Kulaga A A *Phys. Lett. A* **202** 7 (1995)
81. Petrosky T, Prigogine I *Physica A* **147** 439 (1988)
82. Petrosky T, Prigogine I *Physica A* **175** 146 (1991)
83. Kadomtsev B B, Kadomtsev M B *Chaos* **6** 399 (1996)
84. Sokolov Yu L, Yakovlev V P, Pal'chikov V G *Phys. Scripta* **48** 86 (1993); Sokolov Yu L, Yakovlev V P, Pal'chikov V G *Phys. Scripta* **49** 86 (1994)
85. Sokolov Yu L, Yakovlev V P, Pal'chikov V G, Lin D N *Nuovo Cimento D* **14** 183 (1992)
86. Kadomtsev B B, Kadomtsev M B *Phys. Scripta* **50** 243 (1994)
87. Абрикосов А А *Основы теории металлов* (М.: Наука, 1987)
88. Kadomtsev B B, Kadomtsev M B, Kucheryaev Yu A, Podogov Yu L, Sokolov Yu L *Phys. Scripta* **51** 156 (1996)
89. Eckraft H, Fritsche L, Noffke J J. *Phys. F* **134** 97 (1984)
90. Freedman S J, Clauser J R *Phys. Rev. Lett.* **28** 938 (1972)
91. Fry F S, Thomson R C *Phys. Rev. Lett.* **37** 465 (1976)
92. Ghirardi G C, Weber T *Lett. Nuovo Cimento* **26** 599 (1979)
93. Ghirardi G C, Rimini A, Weber T *Lett. Nuovo Cimento* **27** 293 (1980)
94. Bussey R V *Phys. Lett. A* **90** 9 (1982)
95. Shimony A, in *Proc. 3rd Int. Symp. Found. Quant. Mech. Tokyo, 1983* (Tokyo: Physical Society of Japan, 1983) p. 225
96. Herbrt N *Found. of Physics* **12** 1171 (1982)
97. Wootters W K, Zurek W H *Nature* (London) **229** 802 (1982)
98. Glauber R J *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **480** 336 (1986)
99. Kadomtsev B B *Phys. Lett. A* **210** 371 (1996)
100. Lorenz E N *Tellus* **16** 1 (1964)
101. Николис Дж *Динамика иерархических систем* (М.: Мир, 1989)
102. Эбелинг В *Образование структур при необратимых процессах* (М.: Мир, 1979)
103. Хакен Г *Синергетика* (М.: Мир, 1980)
104. Полак Л С, Михайлов А.С. *Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах* (М.: Наука, 1983)
105. Хакен Г *Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах* (М.: Мир, 1985)
106. Omnés R *Rev. Mod. Phys.* **164** 339 (1992)
107. Solomonoff R J *Information and Control* **7** 1 (1964)
108. Kolmogorov A N *Information Transmission* **1** 3 (1965)
109. Chaitin G J J. *ACM* **13** 547 (1966)
110. Bennett C H *Scientific American* **255** 108 (1987)
111. Zurek W H in *Proc. 3rd Int. Symp. Found. Quant. Mech. Tokyo, 1989* (Tokyo: Physical Society of Japan, 1989) p. 115



112. Zurek W H *Complexity, Entropy and Physics of Information* (Ed. W H Zurek) (Addison-Wesley, 1990) p. 73
113. Caves C M *Complexity, Entropy and Physics of Information* (Ed. W H Zurek) (Addison-Wesley, 1990) p. 91
114. Zeh H D *Complexity, Entropy and Physics of Information* (Ed. W H Zurek) (Addison-Wesley, 1990) p. 405
115. Landauer R, in *Proc. 3rd Int. Symp. Found. Quant. Mech. Tokyo, 1989* (Tokyo: Physical Society of Japan, 1989) p. 407
116. Landauer R *Nature* (London) **335** 779 (1988)
117. Bohr N *Phys. Rev.* **48** 696 (1935), перевод: *УФН* **16** (4) 446 (1936)
118. Bohm D, in *Quantum Theory and Measurement* (Eds J A Wheeler, W H Zurek) (Princeton: Princeton, 1983) p. 356
119. Franson J D *Phys. Rev. Lett.* **62** 2205 (1989)
120. Franson J D in *Proc. 3rd Int. Symp. Found. Quant. Mech. Tokyo, 1989* (Tokyo: Physical Society of Japan, 1989) p. 177
121. Kwiat P G, Steinberg A M, Chiao R Y *Phys. Rev. A* **47** R2472 (1993)
122. Brendel J, Mohler E, Martienssen W, *Europhys Lett.* **23** 880 (1992)
123. Rarity J G, Tapater P R *Phys. Rev. Lett.* **73** 1923 (1994)
124. Hughston L P, Jozsa R, Wootters W K, *Phys. Lett. A* **183** 14 (1993)
125. Bennett C H, Bernstein, Popescu S, Schumacher B *Phys. Rev. A* **53** 2046 (1996)
126. Peres A *Complexity, Entropy and the Physics of Information, SFI Studies in the Sciences of Complexity*, Vol. VIII (Ed. W H Zurek) (Addison-Wesley, 1990) p. 345
127. Enz C P *Found. Physics* **24** 1281 (1994)
128. Мазец Е И, Матисов Б Г *Письма ЖТФ* **22** (14) 73 (1996)
129. Peres A *Am. J. Phys.* **52** 644 (1984)
130. Peres A *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **480** 438 (1986)
131. Pearle P *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **480** 539 (1986)
132. Ghirardi G C, Pearle P, Rimini A *Phys. Rev. A* **42** 78 (1990)
133. Zurek W H, in *Proc. Int. Symp. Found. Quant. Mech. Tokyo, 1983* (Tokyo: Physical Society of Japan, 1983) p. 181
134. Zurek W H *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **480** 89 (1986)
135. Namiki M, Pascasio S, Schiller C *Phys. Lett. A* (Netherlands) **187** 17 (1994)
136. Unruh W C, Zurek W H *Phys. Rev. D* **40** 1071 (1989)
137. Popescu S, Rohrlich D *Found. Phys.* **24** 379 (1994)
138. Zurek W H *Phys. Rev. D* **24** 1516 (1981)
139. Zurek W H *Phys. Rev. D* **26** 1862 (1982)
140. Zurek W H *Ann. N. Y. Acad. Sci.* (1989)
141. Unruh W G, Zurek W H *Phys. Rev. D* **40** 1071 (1989)
142. Joos E, Zeh H D *Z. Phys. B* **29** 223 (1985)
143. Joos E *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **480** 6 (1986)
144. Bell J S *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (Cambridge, England: Cambridge Univ. Press, 1987)
145. Кадомцев Б Б *УФН* **165** 967 (1995)
146. Peres A *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993)

# Предметный указатель

Алгоритмическая информация 350

Аттрактор (странный) 322

**Белла** неравенства 121

Бит 19

Броуновское движение классической частицы 72

— — квантовой частицы 200

**Вероятность** 19

Вигнера функция 86

Волны 37

Волновой пакет 46

Волновая функция 45

Волновые функции атомов газа 220

Восприятие 88

Вторичное квантование 300

**Газодинамика** 34

Дуализм волна – частица 56

Забит 127

Запутанные состояния 125, 354

Зенона эффект 197

**Измерения в квантовой механике** 109

Иерархические системы 328

Информация алгоритмическая 350

— по Шеннону 20

Информационно открытые системы 383

Исследование эффекта Соколова 203

**Квантовые вычисления** 130

— корреляции 241

- Квантовая криптография 123  
Квантовый телеграф 270  
Квантовая телепортация 123  
Кинетическое уравнение 163  
— — для амплитуд 227, 308  
Классический мир 299  
Коллапсы волновых функций 153  
Кинетика газа 305  
Конвекция 317  
Кубит 127, 131
- Мезомир** 144  
Мера запутанности 354  
Модель непрерывного коллапсирования 216  
Молекулярный хаос квантовый 211  
— — классический 163
- Намерения** 46  
Нат 20  
Негэнтропия 327  
Необратимость квантовая 179, 369  
— классическая 172
- Открытые системы** 383
- Парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена** 118  
Приближение к равновесию 345
- "Радиоактивный распад"** 62
- Самоорганизация** 324  
Сверхсветовая коммуникация 281  
Свобода воли 338  
Случайная волновая функция 137  
Соколова эффект 242  
Странный аттрактор 322  
Стягивание волновой функции — см. коллапс волновой функции
- Телепортация** 123  
Теория эффекта Соколова 251

**Управление** 33

Управляющий параметр 321

Управляющее уравнение 227

Уравнение Ланжевена 73

— Фоккера – Планка 74

— Шрёдингера 45

**Фейнмана диаграммы** 52

**Флуктуации** 93

**Хаос динамический** 323

— молекулярный классический 211

— — квантовый 229

**Хинт** 104

**Цикл Карно** 23

**Частица в термостате** 52

**Шрёдингера кот** 66

— уравнение 45

**Шмидта полярная форма** 129

**Эйнштейна – Подольского – Розена парадокс** 118, 315

**Энтропия** 21

**Эффект Зенона** 197

— Соколова 242, 375